ОСНОВЫ МЕХАНИКИ.

Курсъ Николаевскаго Инженернаго Училища

СОСТАВИЛЪ

С. Балдинъ,

Военный инженеръ, преподаватель Николаевской Инженерной Академіи и Училища.

Съ 184 чертежами въ текстѣ

С.-ПЕТЕРБУРГЪ

Изданіе К. Л. Риккера

Невскій пр., № 14

1906.

Типографія Ю. Н. Эрлихъ, Садовая, № 9

ОГЛАВЛЕНІЕ

Введеніе

Предварительныя статьи

I. О функціяхъ

II. О безконечномалыхъ величинахъ и предѣлахъ функцій

III. О геометрическихъ величинахъ или векторахъ

Кинематика.

ГЛАВА I

стр.

Опредѣленіе движенія. Зависимость между разстояніемъ и временемъ.

ГЛАВА II

Сложеніе и разложеніе движеній

ГЛАВА III

Скорость.

ГЛАВА IV

Сложеніе и разложеніе скоростей

ГЛАВА V

Ускореніе

ГЛАВА VI.

Сложеніе ускореній

ГЛАВА VII

Опредѣленіе движенія точки по скорости

стр.

ГЛАВА VIII.

Опредѣленіе движенія точки по ускоренію

ГЛАВА IX.

Движеніе тѣлъ брошенныхъ

ГЛАВА X.

Колебательныя движенія (гармоническія).

ГЛАВА XI

Движеніе твердаго тѣла

Динамика.

ГЛАВА XII

Основныя начала динамики

I Динамика точки

ГЛАВА XIII.

Зависимость между силами, приложенными къ точкѣ

ГЛАВА XIV

Зависимость между силами и движеніемъ точки

ГЛАВА XV

Законъ количества движенія

стр.

ГЛАВА XVI.

Работа и мощность

ГЛАВА XVII

Законъ живыхъ силъ.

ГЛАВА XVIII.

Движеніе несвободной точки

ГЛАВА XIX.

О моментахъ силъ

II Динамика системъ точекъ

ГЛАВА XX.

Основныя опредѣленія

ГЛАВА XXI.

Законъ движенія центра инерціи

ГЛАВА XXII

Законъ количествъ движенія

ГЛАВА XXIII

Законъ моментовъ количествъ движенія

ГЛАВА XXIV

О равновѣсіи силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу

ГЛАВА XXV

Законъ живыхъ силъ

ГЛАВА XXVI

Законъ сохраненія энергіи

ГЛАВА XXVII

Центральныя силы и силовыя поля

стр

ГЛАВА XXVIII

Ударъ тѣлъ

Замѣченныя опечатки

Страк	*Строка.*	*Напечатано*	*Должно быть*
15	9 — снизу	Получимъ кривыя, называемыя гиперболами. Въ послѣднемъ случаѣ гипербола будетъ равнобокой	Получимъ кривыя, называемыя гиперболами
104	Фиг. 80	$\Delta\omega$	Δ
113	Фиг. 80а	$\Delta\alpha$	$\Delta\varphi$
114	8 снизу	ω до нуля $\cos\varphi$	$\Delta\varphi$ до нуля $\cos\Delta\varphi$
126	11 снизу	l	$-+x$
183	Фиг. 119		Направленіе оси OC должно быть измѣнено на обратное.
185	Фиг. 120	OB	O_1B
235	Фиг. 138	s	Δs
244	7	разстоянія L	разстоянія s
246	13 снизу	1 литръ вѣситъ 1 кгр	1 литръ воды вѣситъ 1 клг.
252	урав. 128о	$\frac{mv_1^2}{2}$	$\frac{mv_0^2}{2}$
261	Фиг. 153		Перенести построеніе параллелограма изъ точки B въ точку C.

ПРЕДИСЛОВІЕ

Предлагаемый читателямъ курсъ «Основъ Механики» былъ изданъ первоначально въ 1901 году въ видѣ литографированныхъ записокъ для юнкеровъ Николаевскаго Инженернаго Училища въ объемѣ значительно меньшемъ настоящаго, который является такимъ образомъ значительно пополненнымъ, въ него включены нѣкоторые отдѣлы кинематики, какъ то: гармоническое движеніе и движеніе тѣлъ брошенныхъ; нѣкоторыя главы кинетики а именно: мощность центральныя силы, ударъ тѣлъ и др

Курсъ «Основъ механики» преслѣдуетъ цѣль систематическаго изложенія главныхъ понятій теоретической механики. При этомъ все изложеніе ведется безъ помощи высшей математики на основаніи свѣдѣній, излагаемыхъ въ алгебрѣ, геометріи и тригонометріи *). Такъ какъ однако для строгаго научнаго изложенія механики необходимо прибѣгнуть къ теоріи предѣловъ, то сущность послѣдней изложена во введеніи. Пользоваться понятіями, относящимися къ предѣламъ, является желательнымъ и по нѣкоторымъ другимъ соображеніямъ, а именно: движеніе, равно какъ и многія другія физическія явленія, получаетъ вполнѣ точное выраженіе лишь при посредствѣ предѣловъ и тѣхъ методовъ математики, которые основаны на предѣлахъ. Познакомившись съ основаніями теоретической механики, изложенными при помощи только что указаннаго метода читатель будетъ введенъ такимъ образомъ при посредствѣ реальныхъ примѣровъ въ область высшей математики.

Для достиженія послѣдней цѣли изложенію приданъ возможно болѣе общій характеръ, особенно со стороны математическихъ обобщеній, для чего вездѣ, гдѣ это полезно, указывается математическій смыслъ выводимыхъ въ курсѣ выраженій, что позволяетъ провести аналогіи между различными величинами, разсматриваемыми въ теоретической механикѣ, соотношеніе между которыми выражаемое аналитически или графически, оказывается тождественнымъ.

Съ этой точки зрѣнія особенно важнымъ является изученіе кинематики, гдѣ при переходѣ отъ разстояній къ скоростямъ и ускореніямъ и обратно изучаются на примѣрахъ относящихся къ движенію основные пріемы высшаго анализа.

Здѣсь умѣстно кстати указать, что элементарное—по пріемамъ,—но

*) Весьма полезно знаніе хотя бы началъ аналитической геометріи. Впрочемъ все, входящее въ область этого отдѣла математики, объясняется попутно въ соотвѣтствующихъ мѣстахъ книги.

строго научное — по сущности — изложеніе теоретической механики безъ посредства высшаго анализа имѣетъ нѣкоторыя преимущества по сравненію съ обратнымъ порядкомъ изученія математики и механики. Такъ, часто курсъ высшей математики читается въ теченіе непродолжительнаго времени, совершенно недостаточнаго для того чтобы предметъ этотъ въ объемѣ преподаванія былъ въ совершенствѣ усвоенъ слушателями. При прохожденіи механики, основанной на изученіи высшей математики при указанныхъ условіяхъ приходится зданіе механики строить на недостаточно прочномъ фундаментѣ. При этомъ въ выводахъ курса механики, гдѣ примѣняются пріемы высшаго анализа, вниманіе слушателей, въ особенности только что прошедшихъ послѣдній курсъ, невольно отвлекается отъ чисто механической стороны дѣла въ сторону математическую, такъ какъ приходится преодолѣвать затрудненія математическаго характера. Слушатель вмѣсто того, чтобы сосредоточить все свое вниманіе на сущности изучаемаго явленія занимается исключительно математическими выкладками надъ величинами, реальное — механическое или, болѣе общее, физическое — значеніе которыхъ онъ совершенно упускаетъ изъ виду. Между тѣмъ въ случаяхъ, когда математика является однимъ изъ служебныхъ предметовъ, вспомогательнымъ средствомъ при изученіи наукъ техническихъ, естественныхъ и друг., особенно важно отдавать себѣ отчетъ въ физическомъ значеніи какъ различныхъ величинъ, съ которыми приходится имѣть дѣло при математическихъ выкладкахъ, такъ и въ дѣйствіи и результатахъ, изъ нихъ получаемыхъ.

По моему личному опыту переходъ отъ физической стороны того или другого изучаемаго вопроса къ математическому выраженію соотношеній между величинами, входящими въ него, представляется наиболѣе труднымъ для слушателей. Въ то время какъ слушатели легко усваиваютъ различныя алгебрическія выкладки, сложныя геометрическія построенія *), отчетливо излагаютъ физическіе опыты, — математическое выраженіе физическихъ явленій и обратно физическое толкованіе математическихъ дѣйствій и, такъ сказать, «овеществленіе» результатовъ, получаемыхъ путемъ ихъ, представляется обыкновенно дѣломъ наиболѣе труднымъ. Между тѣмъ при изученіи техническихъ и естественныхъ наукъ эта сторона образованія какъ разъ и выражаетъ наиболѣе полно его духъ, она наиболѣе и отличаетъ общностью своихъ методовъ и своей научностью инженера отъ техника-ремесленника

По изложеннымъ соображеніямъ изученіе основъ теоретической механики ранѣе высшей математики можетъ быть признано полезнымъ, можетъ окупить произведенную затрату времени и, наконецъ, оправдаться экономіей его при прохожденіи курса аналитической механики.

Для того, чтобы связать выводы и опредѣленія послѣдней съ выводами элементарнаго курса, въ нѣкоторыхъ мѣстахъ приведены мелкимъ шрифтомъ соотвѣтственныя доказательства, сдѣланныя при помощи высшей математики

---

*) Построенія особенно часто заинтересовываютъ учащихся.

Относительно общаго плана и содержанія «Основъ механики» нужно замѣтить слѣдующее.

Собственно изложенію механики предшествуютъ предварительныя статьи: 1) Статья о функціяхъ, гдѣ указаны основныя понятія и способъ графическаго изображенія функціи. 2) Статья о предѣлахъ функцій, гдѣ даны главныя опредѣленія; многіе же изъ теоремъ о предѣлахъ функцій изложены въ тѣхъ мѣстахъ курса, гдѣ онѣ находятъ непосредственное примѣненіе. Такой пріемъ долженъ облегчить, по моему мнѣнію, постепенное усвоеніе новаго для слушателей понятія о предѣлахъ и будетъ менѣе отвлекать вниманіе ихъ отъ разсмотрѣнія явленія съ чисто механической стороны его. 3) Статья о векторахъ обобщаетъ изложеніе отдѣльныхъ вопросовъ ея (сложеніе хордъ движеній, скоростей, ускореній, силъ и т. д.) и упрощаетъ формулированіе многихъ теоремъ, относящихся къ сложенію и разложенію различныхъ механическихъ величинъ.

При изложеніи кинематики я придерживался общепринятой постепенности, слѣдуя въ общихъ вопросахъ о разстояніи, скорости и ускореніи порядку, принятому въ «Началахъ механики» І. Кирпичева. Въ концѣ кинематики разсмотрѣно отдѣльно движеніе тѣлъ брошенныхъ, колебательныя движенія и движеніе твердаго тѣла.

Въ динамикѣ точки кромѣ уравненія движенія, законовъ количества движенія и живыхъ силъ и работы произведено подробное разсмотрѣніе понятіе о мощности. Введеніе этого вопроса въ теоретическую механику я считаю необходимымъ, какъ по самой сущности дѣла, такъ и потому, что въ прикладныхъ наукахъ очень часто можно встрѣтить смѣшеніе понятій работы и мощности или игнорированіе точнаго употребленія этихъ опредѣленій.

Динамика системъ точекъ кромѣ законовъ движенія центра инерціи, количествъ и моментовъ количествъ движенія и живыхъ силъ содержитъ главы сохраненіи энергіи, о центральныхъ силахъ и силовыхъ поляхъ, объ ударѣ тѣлъ и главу объ общихъ условіяхъ равновѣсія силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу. Изложеніемъ свѣдѣній, сюда относящихся, имѣлось въ виду связать выводы кинематики и кинетики со статикой. Связь эта часто утрачивается при отдѣльномъ самостоятельномъ изложеніи статики по методу Пуансо. Я не ввелъ однако всего курса статики потому, что отдѣлъ этотъ является болѣе самостоятельнымъ, нежели прочіе; добавленіе же его слишкомъ бы увеличило объемъ книги.

Что касается порядка изученія «Основъ механики», то имѣя въ виду прикладное значеніе отдѣльныхъ вопросовъ математики, изложенныхъ въ предварительныхъ статьяхъ, можно посовѣтовать совершать изученіе въ такой постепенности: функціи, опредѣленіе движенія, вектора, сложеніе движеній, предѣлы до § 15, скорость и затѣмъ далѣе въ порядкѣ книги.

Въ особенности важна только что указанная послѣдовательность при самостоятельномъ изученіи предмета.

Далѣе нужно упомянуть о необходимости вычеркиванія чертежей заключающихся въ курсѣ, по мѣрѣ чтенія его, при чемъ особенное вниманіе слѣдуетъ обратить на постепенность возникновенія чертежей, въ этомъ отношеніи можетъ быть сохранена въ извѣстной степени хорошая сторона лекціоннаго преподаванія.

Существенно необходимымъ при изученіи механики мы считаемъ рѣшеніе достаточнаго количества задачъ; поэтому вслѣдъ за теоретической частью въ концѣ каждой главы приложены разнообразные примѣры и вопросы, изъ которыхъ многіе снабжены рѣшеніями.

Относительно пріемовъ рѣшенія задачъ не могу не указать на крупные недостатки, допускаемые иногда въ преподаваніи. При рѣшеніи задачъ на первый планъ часто ставятъ достиженіе окончательныхъ результатовъ, полученіе рѣшенія и сравненіе его съ приложеннымъ къ книгѣ; при чемъ нерѣдко не обращается никакого вниманія на самый ходъ рѣшенія, на послѣдовательность разсужденій, ведущую къ отысканію результатовъ. Такая постановка дѣла совершенно неправильна. При рѣшеніи задачъ особенно важнымъ является планъ рѣшенія, порядокъ разсужденій, который долженъ быть установленъ ранѣе производства вычисленій. Съ этой точки зрѣнія было бы полезно не снабжать задачъ отвѣтами. Но при отсутствіи послѣднихъ при самостоятельномъ рѣшеніи примѣровъ читатель не имѣлъ бы возможности убѣдиться въ вѣрности рѣшенія.

Самая выработка хода рѣшенія и представляетъ собою рѣшеніе задачи въ смыслѣ приложенія теоретическихъ свѣдѣній по механикѣ; производство же выкладокъ не имѣетъ съ принципіальной стороны съ механикой ничего общаго; эта сторона рѣшенія при прохожденіи механики имѣетъ второстепенное, служебное значеніе. На такое раздѣленіе самого рѣшенія задачи на двѣ части должно быть обращено самое строгое вниманіе.

При рѣшеніи задачъ и примѣровъ, входящихъ во многіе предметы курса среднихъ учебныхъ заведеній обычнымъ является слѣдующее: заданіе содержитъ всегда полное число данныхъ, необходимое для рѣшенія вопроса. Учащемуся и не приходитъ въ голову задаться вопросомъ, всѣ ли данныя на лицо и почему тѣ ли или другія изъ нихъ необходимы. Между тѣмъ въ практикѣ при рѣшеніи вопросовъ инженерныхъ или другихъ первое, съ чѣмъ приходится имѣть дѣло, это опредѣленіе наличности наименьшаго необходимаго числа данныхъ, требующихся для опредѣленнаго рѣшенія вопроса. Ввиду этого нѣкоторыя изъ задачъ курса содержатъ неполное количество данныхъ, при чемъ опредѣленіе наличности необходимаго числа ихъ должно явиться одной изъ самыхъ поучительныхъ стадій въ рѣшеніи задачи съ механической точки зрѣнія.

За всякія указанія на возможные недочеты и погрѣшности въ изложеніи считаю долгомъ заранѣе выразить свою признательность.

С. Балдинъ.

Литература

Л. Кирпичевъ Начала механики. СПБ., 1889

Н П. Фанъ-деръ-Флитъ. Введеніе въ механику. СПБ , 1886. ч. I. Основные законы движенія (кинематика точки) Ч II Основные законы силъ (динамика точки).

Н Щукинъ. Теоретическая механика. Лекціи, читанныя въ С.-Петербургскомъ Технологическомъ Институтѣ. Статика. Кинематика. 190^3/$_4$.

И Вышнеградскій. Элементарная механика. СПБ., 1860.

Н Азбелевъ. Начала механики. Отдѣлъ I. Кинематика. СПБ., 1892

А. Гречаниновъ. Основанія кинематики. Харьковъ 1901.

Ар. Домогаровъ. Основы механики Выпускъ I, Введеніе. Выпускъ III, Статика Сборникъ Института Инженеровъ Путей Сообщенія, 1897 и 1901

А. Гречаниновъ. Основанія статики твердаго тѣла и системы вообще.

Д. Бобылевъ. Руководство къ курсу теоретической механики СПБ., 1895

С. Гуржеевъ. Учебникъ механики. Основы общей механики СПБ , 1896

С. Балдинъ. Энергія и мощность. Инженерный журналъ, 1901, № 11.

Wernicke. Lehrbuch der Mechanik in elementarer Darstellung Braunschweig, 1900—1901.

Aug Föppl. Vorlesungen über technische Mechanik. I Band Einführung in die Mechanik. II Band, Dynamik. Leipzig 1900 —1901.

A Flamant. Mécanique générale. Paris, 1888

P Appell. Traité de mécanique rationnelle.

Lorenz. Lehrbuch der technischen Physik I Band Technische Mechanik starrer Systeme. 1902.

M Levy. Elements de cinématique et de mécanique. Paris, 1902

Narr. Einleitung in die theoretische Mechanik Leipzig 1875

Условныя обозначенія

F — сила

g — ускореніе силы тяжести

H — напряженіе поля.

ε — угловое ускореніе.

k — касательное ускореніе.

M — моментъ.

m — масса.

N — мощность

n — нормальное ускореніе.

n — число оборотовъ въ мин

P, p — вѣсъ тѣла или точки

R — равнодѣйствующая сила

r — радіусъ кривизны

S — площадь кривой линіи

s — разстояніе.

T — работа.

t — время.

V — потенціалъ.

v — скорость

w — полное ускореніе

X, Y, Z — проекціи силы соотвѣтственно на оси Ox, Oy, Oz.

α — уголъ.

μ — масса системы матеріальныхъ точекъ.

φ — уголъ

ω — угловая скорость

м — метръ.

км. — километръ.

см — сантиметръ

мм. — миллиметръ

гр. — граммъ

кгр. — килограммъ

ф., фут — футъ.

фн — фунтъ.

м/сек — метръ въ секунду

ВВЕДЕНІЕ

§ 1. Предметъ механики. Теоретическая механика

Механика есть наука о движеніи.

Разсматривая явленія природы, можно видѣть, что свойство движимости вмѣстѣ съ другими свойствами, каковы протяженность и непроницаемость, присуще всѣмъ тѣламъ природы.

Какъ извѣстно, на основаніи закона сохраненія вещества, вещество не творится вновь и не исчезаетъ; слѣдовательно измѣненія, съ нимъ происходящія, состоятъ исключительно въ перемѣщеніяхъ его частицъ, въ движеніи ихъ, будутъ ли то движенія видимыя или молекулярныя. Изъ сказаннаго ясно значеніе механики какъ одной изъ основныхъ естественныхъ наукъ.

Роль, которую играетъ механика въ техникѣ, можно видѣть изъ слѣдующаго *): «Во всѣхъ промышленныхъ производствахъ, какъ бы различны они ни были, есть одна общая имъ всѣмъ черта; чтобы найти ее, возьмемъ нѣсколько примѣровъ. Если изъ нитокъ человѣкъ хочетъ составить ткань, то онъ долженъ расположить ихъ въ извѣстномъ порядкѣ, и для того извѣстнымъ образомъ перемѣстить ихъ. Чтобъ получить гладкую поверхность дерева, на которой можно было бы съ удобствомъ производить извѣстныя работы, человѣкъ долженъ удалить частицы дерева, выставляющіяся изъ-за плоскости, которую онъ хочетъ получить; слѣдовательно опять долженъ частицы дерева извѣстнымъ образомъ передвинуть. Чтобы сдѣлать возможнымъ посѣвъ зерна, человѣкъ долженъ сперва вспахать землю, т. е. опять перемѣстить части, составляющія почву, извѣстнымъ образомъ. Можно по произволу множить эти примѣры, но и то, что мы сказали до сихъ поръ, ясно показываетъ, что всякое промышленное производство въ сущности приводится къ извѣстнымъ совершенно опредѣленнымъ перемѣщеніямъ частицъ вещества, подвергаемаго обработкѣ».

Ввиду этого механика въ своемъ полномъ объемѣ, не ограничиваясь только изслѣдованіемъ движеній въ различныхъ многообраз

*) Л. Кирпичевъ. Начала механики, 1880, стр. 21.

ныхъ проявленіяхъ ихъ, имѣетъ цѣлью въ дальнѣйшемъ также изученіе пріемовъ, помощью которыхъ, зная основные законы движенія и, разумѣется, свойства тѣлъ, съ которыми приходится имѣть дѣло, можно произвести соотвѣтствующія перемѣщенія тѣлъ или ихъ частей и при томъ способами, наиболѣе подходящими къ данному случаю, наиболѣе удовлетворяющими специальнымъ условіямъ его, какъ со стороны чисто технической, такъ и со стороны экономической.

Вопросы относительно движенія тѣлъ, которые должна рѣшить механика, представляются такимъ образомъ весьма разнообразными; естественно, что при прохожденіи курса механики, нужно соблюсти извѣстную послѣдовательность, начавъ съ наиболѣе простыхъ явленій движенія и притомъ наиболѣе общихъ съ цѣлью возможно полнаго осуществленія принципа экономіи при изученіи.

Вслѣдствіе этого слѣдуетъ обратить вниманіе на сущность явленій движенія, на общіе законы, которымъ подчиняется движеніе всѣхъ тѣлъ природы. Эта задача составляетъ предметъ теоретической или раціональной механики, названной такъ потому, что выводы ея чисто умозрительнаго характера основываются на немногихъ опытныхъ данныхъ, относящихся вообще къ явленію движенія. Теоретическая механика разсматриваетъ движеніе не дѣйствительныхъ тѣлъ, а тѣлъ воображаемыхъ, сохраняющихъ только тѣ общія основныя свойства разнообразныхъ тѣлъ природы, которыя имѣютъ значеніе при рѣшеніи вопросовъ о движеніи ихъ.

Прочный фундаментъ для развитія теоретической механики, какъ науки математической, былъ положенъ Ньютономъ, указавшимъ основные законы или начала, которымъ подчиняется движеніе тѣлъ природы. До него же всѣ свѣдѣнія относительно движенія носили чисто опытный, эмпирическій характеръ.

Дальнѣйшее изученіе механики состоитъ въ примѣненіи общихъ законовъ движенія къ различнымъ тѣламъ, при чемъ для рѣшенія практическихъ вопросовъ движенія или покоя тѣлъ должны быть приняты во вниманіе уже многія физическія свойства ихъ. Эта часть механики, распадающаяся въ свою очередь на рядъ болѣе или менѣе самостоятельныхъ отдѣловъ, носитъ названіе механики практической или прикладной. Въ ней, очевидно, даннымъ опыта должно отводиться болѣе значительное мѣсто, нежели въ механикѣ теоретической.

§ 2. Раздѣленіе теоретической механики.

Обращаясь къ изученію теоретической механики, основы которой и будутъ изложены въ настоящемъ курсѣ, естественнымъ представляется придерживаться такого порядка въ изложеніи: сначала разсмотрѣть — какъ совершается явленіе движенія тѣлъ (описаніе явленія движенія), а затѣмъ попытаться объяснить—почему въ каждомъ частномъ случаѣ движеніе совершается такъ, а не иначе (объясненіе причинъ движенія). Согласно этому теоретическая механика распадается на двѣ части: кинематику и динамику.

Кинематика (отъ греческаго слова κίνημα—движеніе) занимается изученіемъ движенія тѣлъ, не касаясь объясненія причинъ его производящихъ.

Названіе „кинематики“ (cinématique) этой части теоретической механики было впервые дано французскимъ физикомъ Амперомъ (Ampère, Essai sur la Philosophie des sciences, 1830). Кинематику называютъ также форономіей, т. е. геометріей движенія, геометріей четырехъ измѣреній, такъ какъ къ числу трехъ измѣреній пространства, въ которомъ движется какое-либо тѣло, присоединяется еще четвертая величина—время.

Динамика (отъ греческаго слова δύναμις—сила) разсматриваетъ движеніе тѣлъ въ связи съ причинами производящими его извѣстными подъ общимъ именемъ силъ.

§ 3. Понятіе о матерьяльной и геометрической точкѣ

Приступая къ изученію движенія тѣлъ и желая соблюсти при этомъ извѣстную послѣдовательность въ видахъ упрощенія и облегченія самаго изложенія, нужно указать на то, что всякое физическое тѣло состоитъ изъ отдѣльныхъ весьма малыхъ матерьяльныхъ частицъ или, если мы пренебрежемъ размѣрами частицъ вслѣдствіе ничтожности этихъ размѣровъ,—матерьяльныхъ точекъ; при этомъ каждая матерьяльная точка сохраняетъ съ той матерьяльной частицей, которую она замѣняетъ, то общее свойство, что количества матеріи или вещества въ каждой изъ нихъ заключающагося между собою равны.

Всякое физическое тѣло является, слѣдовательно, совокупностью или системой матерьяльныхъ точекъ.

Вполнѣ естественнымъ представляется заняться предварительно разсмотрѣніемъ движенія одной матерьяльной точки, а затѣмъ уже перейти къ подобнымъ же изслѣдованіямъ относительно тѣлъ или системъ точекъ. Мы въ дальнѣйшемъ такъ и поступимъ. Сверхъ того, если мы будемъ разсматривать движеніе точки или тѣла съ кинематической точки зрѣнія, для насъ является совершенно безразличнымъ вопросъ о физическихъ свойствахъ этой точки; поэтому въ кинематикѣ мы можемъ вмѣсто движенія матерьяльной точки разсматривать движеніе точки геометрической, а вмѣсто системы матерьяльныхъ точекъ—систему точекъ геометрическихъ.

§ 4. Поступательное движеніе тѣла.

Слѣдуетъ замѣтить, что результаты, доставленные изученіемъ движенія точки въ одномъ случаѣ являются вполнѣ достаточными и для опредѣленія движенія тѣла: это случай такъ называемаго поступательнаго движенія твердаго тѣла, подъ которымъ разумѣютъ слѣдующее: возьмемъ какія-либо двѣ точки тѣла, соединимъ ихъ прямой, и если всѣ перемѣщенія тѣла будутъ таковы, что эта прямая будетъ перемѣщаться паралельно самой себѣ, то такое движеніе называютъ поступательнымъ. Зная видъ пути движенія только одной точки тѣла, мы будемъ знать также пути, проходимые другими точками, будемъ знать движеніе всего тѣла. Въ томъ случаѣ, когда размѣры тѣла будутъ малы по сравненію съ перемѣщеніями, имъ совершаемыми, тѣло можетъ быть принято за точку или, точнѣе можно удовольствоваться разсмотрѣніемъ движенія одной какой-либо точки его. Таково, напр., движеніе небесныхъ свѣтилъ и вообще движеніе тѣлъ на протяженіяхъ значительно превышающихъ размѣры самыхъ тѣлъ

Предварительныя статьи

I О функціяхъ

§ 5 Понятіе о перемѣнныхъ независимыхъ и о функціяхъ.

При рѣшеніи вопросовъ математики и механики приходится имѣть дѣло съ величинами двухъ видовъ: во-первыхъ, съ такими, которыя сохраняютъ одно и тоже численное значеніе въ данномъ вопросѣ а во-вторыхъ съ такими, которыя этого значенія не сохраняютъ измѣняются. Первые носятъ названіе величинъ постоянныхъ, вторыя — перемѣнныхъ; напр. при движеніи точки разстояніе, проходимое ею въ различные промежутки времени, по самому существу дѣла есть величина перемѣнная

Величины перемѣнныя входящія въ данный вопросъ, въ свою очередь могутъ быть опять подраздѣлены на двѣ категоріи; тѣ изъ нихъ, которыя мы можемъ измѣнять по нашему произволу, называются перемѣнными независимыми; другія, получающія то или другое значеніе въ зависимости отъ того частнаго значенія, которое мы придали перемѣнной независимой, называются зависимыми перемѣнными или функціями независимыхъ. Въ простѣйшемъ случаѣ, имѣя дѣло съ двумя перемѣнными величинами: независимой и функціей ея, мы для каждаго частнаго значенія первой найдемъ соотвѣтствующее значеніе второй если намъ будетъ указана зависимость, существующая между ними.

§ 6 Опредѣленіе зависимости между независимой перемѣнной и функціей ея.

Зависимость между независимой перемѣнной и функціей можетъ быть задана однимъ изъ слѣдующихъ способовъ

1 Аналитически (уравненіемъ). Пусть имѣемъ уравненіе

$$y = 2x^2 - 3$$

въ которомъ x — есть независимая перемѣнная y — функція ея Совершивъ надъ x или точнѣе, надъ взятымъ частнымъ значеніемъ его рядъ математическихъ дѣйствій, указанный даннымъ уравненіемъ мы опредѣлимъ соотвѣтствующіе частное значеніе y; такъ если $x = 2$ то $y = 5$ и т. д.

Очевидно, функціональная зависимость представляетъ собою, вообще говоря, неопредѣленное уравненіе, такъ какъ только при условіи, что число неизвѣстныхъ будетъ больше числа уравненій, неизвѣстныя, входящія въ данное уравненіе, могутъ получать различныя значенія, всегда удовлетворяющія данному уравненію, данной зависимости и быть такимъ образомъ величинами перемѣнными.

Въ общемъ случаѣ; не ставя на видъ тѣхъ дѣйствій которыя нужно совершить съ перемѣнной независимой x для нахожденія y употребляютъ обозначеніе.

$$y = f(x);$$

гдѣ подъ знакомъ f, называемымъ **характеристикой** функціи, подразумѣваются извѣстныя или предполагаемыя извѣстными математическія дѣйствія надъ x.

Въ болѣе общемъ случаѣ двѣ или болѣе перемѣнныхъ величины могутъ быть связаны уравненіемъ, такъ напр.

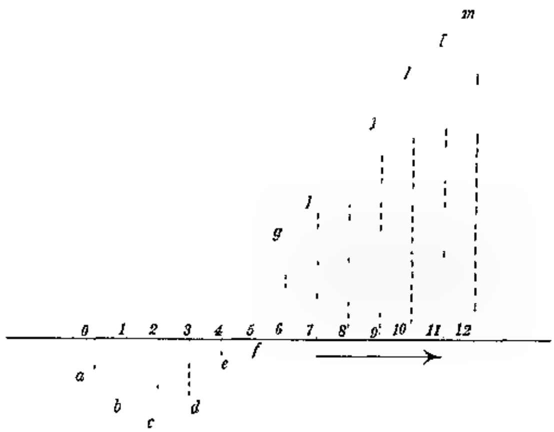
$$f(x, y) = 0$$

Какую изъ этихъ двухъ перемѣнныхъ, выбрать за независимую, какую за ея функцію, зависитъ, вообще говоря отъ насъ; такъ напр. въ приведенномъ выше уравненіи мы могли бы считать перемѣнной независимой y и по частнымъ его значеніямъ находить соотвѣтствующія имъ значенія x. Обыкновенно обстоятельство это въ приложеніяхъ опредѣляется условіями того или другого вопроса. Такъ, при движеніи тѣла разстоянія, имъ проходимыя, разсматриваютъ какъ функціи времени, послѣднее же въ такомъ случаѣ является перемѣнной независимой.

2. **Таблицей.** Положимъ, что мы производили наблюденія надъ измѣненіемъ температуры въ зависимости отъ времени сутокъ. Опредѣленному времени будетъ соотвѣтствовать нѣкоторая опредѣленная температура. При этомъ температура—зависимая перемѣнная; время, протекшее отъ даннаго мгновенія, напр. отъ полуночи, независимая перемѣнная. Результаты наблюденій могутъ быть собраны напр. въ слѣдующую таблицу въ которой въ лѣвомъ столбцѣ помѣщено время въ часахъ, а во второмъ соотвѣтствующія температуры въ градусахъ Цельсія:

12 ч	ночи	-1°	7 ч	утра	$+4^\circ$
1 ч	утра	-2°	8 »	»	$+5^\circ$
2 »	»	$-2{,}5^\circ$	9 »	»	$+6{,}5^\circ$
3 »	»	-2°	10 »	»	$+8^\circ$
4 »	»	$-0{,}5^\circ$	11 »	»	$+9^\circ$
5 »	»	0°	12 ч	дня	$+10^\circ$
6 »	»	$+3^\circ$			

Имѣя такую таблицу, для каждаго значенія времени, указаннаго въ ней, мы найдемъ соотвѣтствующее ему значеніе температуры. Но для промежуточныхъ мгновеній, напр. для 2 ч. 30 м., 3 ч. 15 м. и т. д. таблица не указываетъ значенія температуры. Въ этомъ заключается недостатокъ опредѣленія зависимости между двумя перемѣнными величинами таблицей. Если однако желаютъ знать хотя бы приблизительно, какова была температура въ какое либо промежуточное мгновеніе, напр. въ 2 ч. 30 м. утра, то прибѣгаютъ къ интерполированію. Полагая, что температура измѣнялась на одинаковыя величины въ одинаковые промежутки времени между двумя и тремя часами утра,



1

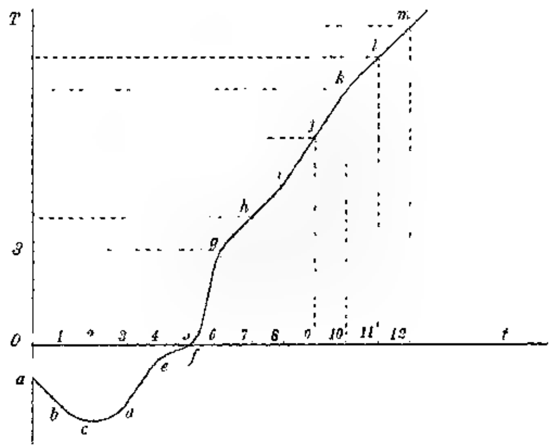
мы будемъ имѣть: въ часъ времени она измѣнилась (повысилась) на 0,5, слѣдовательно въ полчаса на $0,5 \times 0,5 = 0,25^\circ$, а потому температура въ 2 ч. 30 м. утра была приблизительно

$$-2,5^\circ + 0,25^\circ = -2,25^\circ$$

3. Наконецъ, зависимость между двумя перемѣнными величинами можетъ быть задана графически. Для полученія такого графическаго изображенія поступаютъ слѣдующимъ образомъ: берутъ прямую линію, называемую осью (фиг. 1); нѣкоторую точку O этой прямой принимаютъ за начало, отъ котораго откладываютъ значенія перемѣнной независимой въ выбранномъ соотвѣтственнымъ образомъ масштабѣ въ опредѣленномъ направленіи, которое указываютъ стрѣлкой, если не сдѣлано общаго условія относительно этого направленія.

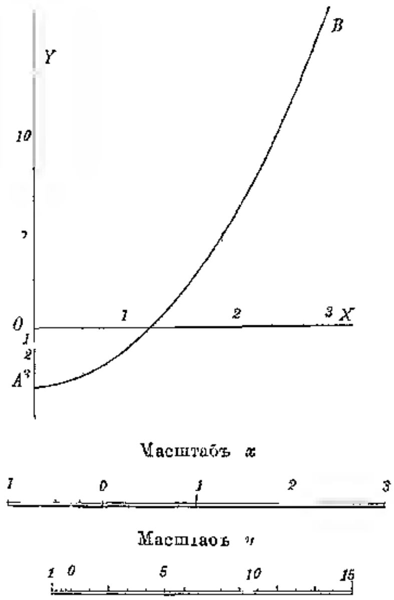
Если мы возьмемъ только что разсмотрѣнный примѣръ зависимости между временемъ и температурой, то по начерченной оси придется отложить отъ начала O значенія временъ, протекшихъ послѣ 12 ч. ночи; поэтому и самая ось получаетъ названіе оси временъ

Найдя точки 0, 1, 2, 3, 4 и т. д. возставляютъ въ нихъ перпендикуляры, на которыхъ откладываютъ соотвѣтственныя данному времени значенія температуръ въ опредѣленномъ масштабѣ. Такъ какъ температура имѣла значенія положительныя и отрицательныя, то условливаются въ одну сторону отъ оси временъ, напр. вверхъ, откладывать положительныя значенія температуръ, въ обратную отри-



цательныя. Концы этихъ перпендикуляровъ и укажутъ, какъ измѣнялась температура (функція) въ зависимости отъ времени (независимая перемѣнная). Мы получаемъ графическое изображеніе таблицы.

При такомъ графическомъ записываніи результатовъ наблюденій можно поступать нѣсколько иначе: откладывая времена по прежнему по горизонтальной оси, въ началѣ временъ 0 возставить къ оси временъ перпендикуляръ OT (фиг. 2) и уже по этому перпендикуляру (второй оси) откладывать значенія температуръ. Проводя затѣмъ изъ соотвѣтственныхъ точекъ обѣихъ осей перпендикуляры до взаимнаго пересѣченія между собою, мы найдемъ рядъ точекъ, обозначенныхъ на предыдущемъ чертежѣ буквами a, b, c d и т. д. Такъ напр. для $t = 6$ час. мы имѣли $T = +3°$; поэтому въ точкѣ 6 по оси температуръ возставляемъ перпендикуляръ до встрѣчи съ 3 въ точкѣ g. Такимъ же образомъ поступимъ и для нахожденія другихъ точекъ a, b, c и т. д. Если мы соединимъ эти точки между собою плавной кривой безъ рѣзкихъ изломовъ, то точки ея будутъ указывать зависимость между временемъ и температурой. Положеніе каждой точки кривой опредѣляется двумя отрѣзками по осямъ временъ и температуръ. Отрѣзки, отложенные по горизонтальной оси и выражающія собою въ данномъ случаѣ значенія перемѣнной независимой называютъ абсцисами точекъ кривой, значенія функціи (температуры), отложенныя по вертикальной оси, называются ординатами точекъ кривой. Такъ какъ всякая изъ точекъ a, b, c, d и т. д. указываетъ на значенія ординаты, соотвѣтствующія значенію абсцисы, давая такимъ образомъ связь, существующую между той и другой, то абсцису и ординату вмѣстѣ называютъ координатами точки. Оси носятъ названіе соотвѣтственно оси абсцисъ и оси ординатъ, въ частности ихъ называютъ осями временъ, температуръ и т. п. Взятыя вмѣстѣ обѣ оси называются осями координатъ, а точка 0 началомъ координатъ.



3

Подобнымъ же образомъ мы можемъ представить графически въ осяхъ x и y приведенную выше зависимость

$$y = 2x^2 - 3$$

Мы получимъ кривую AB, изображенную на фиг. 3, которая можетъ замѣнить собою аналитическую зависимость между x и y. Приведенное же уравненіе представляетъ въ свою очередь уравненіе линіи, изображающей графически зависимость между координатами y и x; выше мы имѣли напр. кривую температуръ.

И аналитическій (уравненіемъ) и графическій (чертежемъ) способъ опредѣленія зависимости между независимой перемѣнной и ея функцій имѣютъ свои выгоды и недостатки. на сторонѣ послѣдняго находится преимущество наглядности изображенія, но за то точность опредѣленія зависитъ отъ взятаго масштаба и искусства чертежника. Зависимость между данными перемѣнными, представленная графически, не всегда можетъ быть выражена аналитически.

II. О безконечномалыхъ величинахъ и предѣлахъ функцій.

§ 7. Понятіе о безконечномалой величинѣ.

Возьмемъ какое-нибудь конечное число и раздѣлимъ его на цѣлое число частей, напр. на двѣ; каждую изъ полученныхъ частей раздѣлимъ снова пополамъ и т. д. По мѣрѣ того, какъ мы будемъ продолжать такое дѣленіе дальше и дальше, получаемыя части, очевидно, будутъ все болѣе и болѣе уменьшаться.

Какъ бы далеко мы ни продолжали подобное дѣленіе, какъ бы ни были слѣдовательно малы получаемыя при этомъ величины, мы всегда можемъ раздѣлить каждую изъ нихъ снова на двѣ или нѣсколько частей. Нельзя представить себѣ, чтобы существовала какая-либо граница подобному дѣленію. Помощью такого безграничнаго дѣленія можно сдѣлать получаемыя отъ дѣленія величины по абсолютному значенію какъ угодно малыми, менѣе какой угодно данной величины. Такія величины носятъ названіе величинъ безконечномалыхъ; основное свойство ихъ —неопредѣленная, безграничная степень уменьшенія.

Какъ бы ни были малы эти величины, онѣ будутъ всегда отличны отъ нуля, такъ какъ путемъ обратнаго сложенія мы можемъ получить первоначальную величину; но очевидно, какое бы количество нулей мы ни брали, мы отъ суммированія ихъ никогда не получимъ конечной величины. Мы можемъ только сказать, что безконечномалая величина стремится къ нулю; нуль есть граница или предѣлъ къ которому безконечномалая величина, будучи величиной перемѣнной, уменьшаясь безгранично, можетъ быть приближена настолько насколько мы того пожелаемъ, но котораго она никогда не достигнетъ

Въ этомъ отношеніи безконечномалыя величины, получаемыя путемъ безграничнаго дѣленія, существенно отличаются отъ величинъ, получаемыхъ вычитаніемъ; разность между двумя количествами при увеличеніи вычитаемаго можетъ быть не только приближена въ желаемой степени къ нулю, но и сдѣлаться нулемъ.

Безконечномалыя величины всегда сохраняютъ свойства тѣхъ величинъ, отъ которыхъ онѣ произведены; такъ отъ дѣленія площади всегда получится площадь отъ дѣленія линіи — линія, отъ дѣленія времени время и т. д.

Безконечномалымъ величинамъ даютъ иногда названіе элементарныхъ значеній или элементовъ даннаго количества; такъ напр. вмѣсто безконечномалый промежутокъ времени говорятъ элементъ времени.

Противоположность величинамъ безконечномалымъ составляютъ безконечнобольшія величины, подъ которыми подразумѣваютъ такія, которыя могутъ быть при соотвѣтственномъ измѣненіи сдѣланы болѣе всякой данной величины; такъ напр. если мы имѣемъ функцію

$$y = \frac{2}{x},$$

то уменьшая x, дѣлая его наконецъ безконечномалымъ, мы получимъ для y безконечнобольшое значеніе.

§ 8. Понятіе о предѣлѣ функціи.

Пусть зависимость y отъ x выражается слѣдующимъ уравненіемъ

$$y = 2 + \frac{1}{x} \qquad (1)$$

Если мы положимъ x равнымъ единицѣ, то y будетъ равняться 3. Будемъ теперь x постепенно увеличивать, тогда соотвѣтственно различнымъ величинамъ x функція получитъ такія значенія:

$x = 1$	$y = 3$
$x = 2$	$y = 2,5$
$x = 3$	$y = 2,33$
$x = 4$	$y = 2,25$
$x = 5$	$y = 2,2$
$x = 10$	$y = 2,1$
$x = 50$	$y = 2,02$
$x = 100$	$y = 2,01$
$x = 1000$	$y = 2,001$
$x = 10000$	$y = 2,0001$
$x = 100000$	$y = 2,00001$

и т. д.

Мы видимъ, что по мѣрѣ возрастанія x, y все уменьшается приближаясь къ двумъ; разница между y и двумя, какъ видно изъ выраженія (1), равна

$$y - 2 = \frac{1}{x}.$$

Увеличивая x, мы будемъ уменьшать эту разность; на основаніи того, что было сказано о безконечномалыхъ величинахъ, ясно, что мы можемъ разность эту сдѣлать какъ угодно малой, менѣе всякой заранѣе заданной величины, другими словами, разность между y и двумя будетъ величиной, которую мы можемъ подвести къ нулю такъ близко, какъ мы того желаемъ, при чемъ y будетъ безпредѣльно приближаться къ двумъ. Такая постоянная величина (въ данномъ случаѣ — два), къ которой функція измѣненіемъ перемѣнной независимой можетъ быть подведена такъ близко, что разность между ними сдѣлается менѣе всякой данной величины, т. е будетъ величиной безконечномалой, называется **предѣломъ** функціи.

Согласно этому опредѣленію нуль есть предѣлъ безконечномалой величины.

Точно такъ же окружность круга есть предѣлъ периметровъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ, при безпредѣльномъ увеличеніи числа ихъ сторонъ, такъ какъ при этомъ разность между окружностью и периметромъ вписаннаго и описаннаго многоугольника можетъ быть сдѣлана менѣе всякой заранѣе данной величины. стоитъ только въ достаточной степени увеличить число сторонъ многоугольниковъ. Но напр., окружность бо́льшаго радіуса, нежели та, около которой описаны или въ которую вписаны многоугольники, уже не будетъ ихъ предѣломъ, такъ какъ разность между послѣдними и этой окружностью не можетъ быть сдѣлана произвольно малой.

Перемѣнная величина, подходя къ предѣлу, никогда его не достигаетъ: дѣйствительно, какъ бы ни былъ великъ x въ приведенномъ примѣрѣ, y будетъ всегда отличаться отъ двухъ хотя бы на безконечномалую величину; точно такъ же, какъ бы ни было велико число сторонъ въ многоугольникѣ вписанномъ въ кругъ или описанномъ около него, мы никогда не получимъ окружности а лишь можемъ подойти къ ней болѣе или менѣе близко.

Слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что можно говорить въ указанномъ смыслѣ только о предѣлахъ **функцій**, но не о предѣлахъ **независимыхъ перемѣнныхъ**, и если говорятъ о предѣлѣ перемѣнной, то подъ послѣдней нужно разумѣть функцію, но не независимую перемѣнную.

Отличительное свойство предѣла по сравненію съ функціей, которая къ нему приближается при соотвѣтственномъ измѣненіи независимой перемѣнной состоитъ въ томъ, что функція заключаетъ въ своемъ опредѣленія нѣкоторый отличительный признакъ, элементъ, не входящій въ опредѣленіе предѣла и способный къ измѣненію; предѣлъ же, будучи по основному опредѣленію величиной въ данномъ вопросѣ постоянной, очевидно не можетъ заключать въ себѣ такого перемѣннаго элемента Дѣйствительно длина окружности даннаго радіуса всегда остается постоянной, такъ какъ измѣненіе числа сторонъ вписаннаго или описаннаго многоугольниковъ не вліяетъ на длину окружности. Многоугольники же заключаютъ въ себѣ не заключающійся въ окружности перемѣнный элементъ въ видѣ числа сторонъ или длины каждой изъ сторонъ, причемъ, очевидно, увеличеніе перваго эквивалентно уменьшенію послѣдней. Точно такъ же въ функціи

$$y = 2 + \frac{1}{x}$$

какъ бы мы не увеличивали x, дробь $\frac{1}{x}$ никогда не будетъ нулемъ что и составляетъ отличительный признакъ функціи отъ ея предѣла, въ которомъ $\frac{1}{x}$ равно нулю. Подобнымъ же образомъ какъ бы мы ни уменьшали разстояніе между наклонной и перпендикуляромъ къ какой либо прямой, подраздѣляя это разстояніе на части, никогда части эти, хотя бы и безконечномалыя, не обратятся въ нули никогда наклонная не совпадетъ съ перпендикуляромъ.

Чтобы показать, что данная постоянная величина a есть предѣлъ функціи y, подходящей напр. къ нему при подведеніи независимой x къ нулю, употребляютъ такое обозначеніе:

$$a = \text{пр}\ (y)_{x=0}$$

Указаніе условій, при которыхъ функція подходитъ къ предѣлу, или законъ измѣненія независимой перемѣнной при подведенія функціи къ предѣлу является существенно важнымъ, такъ какъ одна и та же функція при измѣненіи перемѣнной независимой въ различныхъ направленіяхъ можетъ стремиться къ различнымъ предѣламъ. Такъ, напр., при подведеніи x въ послѣднемъ примѣрѣ къ безконечнобольшой величинѣ y будетъ стремиться къ 2, при постепенномъ уменьшеніи x y будетъ стремиться къ безконечности, а потому можемъ написать:

$$\text{пр.}\ (y)_{x=\infty} = 2$$
$$\text{пр.}\ (y)_{x=0} = \infty$$

Итакъ свойства предѣла суть слѣдующія:

1) Предѣлъ долженъ быть однороденъ съ перемѣнной, которая къ нему приближается (линія можетъ имѣть предѣломъ только линію предѣлъ площади -площадь, предѣлъ силы -сила и т. д.).

2) Въ предѣлъ не долженъ входить перемѣнный признакъ, отличающій существеннымъ образомъ функцію, какъ величину способную къ измѣненію.

3) Разность между предѣломъ и перемѣнной (функцией) можетъ быть сдѣлана произвольно мала (менѣе какой-угодно данной вели-

чины); иначе говоря — разность между предѣломъ и перемѣнной может быть сдѣлана безконечномалой.

Послѣ этихъ предварительныхъ заключеній не представится затрудненій доказать нѣсколько относящихся къ предѣламъ теоремъ, которыми мы воспользуемся впослѣдствіи. Для того, чтобы данная постоянная величина была предѣломъ данной функціи, придется доказать, что разность между ними можетъ быть сдѣлана по абсолютному значенію величиной безконечномалой, или что разность эта есть величина безконечномалая, такъ какъ при разсмотрѣніи соотношенія между перемѣнной и предѣломъ ея, первая берется всегда въ состояніи весьма близкомъ къ предѣлу.

Перемѣнныя обыкновенно обозначаютъ послѣдними буквами алфавита

$$x \quad y$$

предѣлы начальными

$$a \quad b \quad c$$

безконечномалыя разности между тѣми и другими греческими буквами

$$\alpha, \ \beta, \ \gamma, \ \delta$$

причемъ въ этихъ послѣднихъ для насъ представляется важнымъ только ихъ абсолютное значеніе.

§ 9 Произведеніе безконечномалой величины δ на конечную величину k есть величина безконечномалая, иначе—произведеніе безконечномалой величины на конечную имѣетъ своимъ предѣломъ нуль.

Возьмемъ нѣкоторую величину $a > k$, тогда

$$k\delta < a\delta$$

но такъ какъ δ есть величина безконечномалая то мы можемъ сдѣлать ее менѣе частнаго

$$\frac{\omega}{a}$$

гдѣ ω какая угодно данная величина т е

$$\delta < \frac{\omega}{a},$$

откуда

$$a\delta < \omega$$

слѣдовательно

$$k\delta < \omega$$

Видимъ, что произведеніе $k\delta$ можетъ быть сдѣлано менѣе всякой заданной величины ω: отсюда заключаемъ что $k\delta$ есть величина безконечномалая

§ 10. Сумма конечнаго числа безконечномалыхъ величинъ есть величина безконечномалая, иначе если каждый изъ членовъ суммы

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \omega$$

стремится къ нулю, то и вся сумма имѣетъ своимъ предѣломъ нуль.

Если наибольшій по абсолютной величинѣ изъ членовъ суммы будетъ δ, причемъ по условію онъ также величина безконечномалая, а число членовъ суммы n, то

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots \omega < n\delta,$$

откуда на основаніи предыдущей теоремы, заключаемъ что

$$\text{пр}\,(\alpha + \beta + \gamma + \ldots \omega)_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0}} = 0$$

§ 11. Одна и та же функція y, измѣняясь по опредѣленному закону, не можетъ имѣть двухъ разныхъ предѣловъ a и b

Замѣтимъ, что какъ бы ни были близки между собою величины a и b, но онѣ, какъ величины постоянныя, могутъ между собою различаться на нѣкоторую постоянную и конечную величину въ частномъ случаѣ на нуль.

Если допустимъ, что двѣ конечныя величины a и b суть предѣлы одной и той же перемѣнной y то можемъ написать

$$\left.\begin{array}{l} a = y + \alpha \\ b = y + \beta \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Вычитая почленно

$$a - b = \alpha - \beta$$

Но вторая часть этого выраженія есть величина безконечномалая следовательно перемѣнная и при томъ стремящаяся къ нулю; разность же

$$a - b$$

есть величина постоянная и конечная. Но какую бы конечную величину отличную отъ нуля мы ни брали, всегда безконечно малая разность $(\alpha - \beta)$ можетъ быть сдѣлана менѣе взятой конечной величины, т. е. подведена на сколько угодно близко къ нулю. Поэтому написанное равенство или не имѣетъ мѣста или будетъ справедливо лишь въ томъ случаѣ, если $a = b$ что и требовалось доказать

Слѣдствіе 1 Если двѣ функціи при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ остаются равны между собою, то и предѣлы ихъ равны.

Въ этомъ случаѣ мы имѣемъ въ сущности одну функцію, которая по доказанной теоремѣ не можетъ стремиться при измѣненіи по одному опредѣленному закону къ разнымъ предѣламъ

Слѣдствіе 2. Если двѣ перемѣнныя величины x и y различаются между собою на величину безконечно малую, то предѣлы ихъ a и b равны между собою

Имѣемъ

$$y = x + \delta$$

$$a = x + \alpha$$

$$b = y + \beta,$$

или вставляя значеніе y изъ перваго выраженія въ послѣднее получимъ

$$b = x + \beta + \delta = x + \varepsilon$$

гдѣ $\varepsilon = \beta + \delta$ есть величина безконечно малая

Сопоставляя равенства

$$a = x + \alpha$$

$$b = x + \varepsilon$$

съ равенствами (2) и разсуждая подобно изложенному въ теоремѣ мы заключаемъ, что $a = b$.

Слѣдствіе это показываетъ что при вычисленіи предѣла какой либо функціи можно вмѣсто самой функціи брать величину безконечно мало отъ нея отличающуюся (при подведеніи обѣихъ къ предѣлу); таковы напр. функціи: $1 + \frac{2}{x}$ и $1 + \frac{5}{x}$, имѣющія предѣломъ единицу при приближеніи x къ нулю. Точно также мы можемъ къ данной перемѣнной величинѣ прибавлять или отнимать отъ нея величины безконечномалыя, предѣлъ не измѣнится, и мы изъ разсмотрѣнія измѣненной такимъ образомъ перемѣнной придемъ къ тѣмъ же самымъ заключеніямъ относительно предѣла что и изъ разсмотрѣнія первоначальной величины.

§ 12. Предѣлъ суммы конечнаго числа функцій x, y, z.. равенъ суммѣ предѣловъ a, b, c.. этихъ функцій.

По условію

$$x + \alpha = a, \quad y + \beta = b, \quad z + \gamma = c$$

откуда

$$a - x = \alpha, \quad b - y = \beta, \quad c - z =$$

Сложимъ почленно эти равенства:

$$(a + b + c\ldots) - (x + y + z \ldots) = \alpha + \beta + \gamma$$

Сумма

$$\alpha + \beta +$$

есть величина безконечно малая; мы видимъ, слѣдовательно, что разность между постоянной величиной $(a + b + c...)$ и перемѣнной $(x + y + z)$ есть величина безконечномалая а потому

$$\text{пр}\ (x + y + z ...) = a + b + c$$

или

$$\text{пр.}\ (x + y + z ...) = \text{пр.}\ (x) + \text{пр}\ (y) + \text{пр.}\ (z) + \qquad (3)$$

Это доказательство примѣнимо и къ разности такъ какъ сумма $(x + y + z ...)$ есть сумма алгебрическая

§ 13 Предѣлъ произведенія нѣсколькихъ функцій равенъ произведенію ихъ предѣловъ.

Докажемъ эту теорему для двухъ перемѣнныхъ x и y

Имѣемъ

$$x = a + \alpha$$

$$y = b + \beta$$

Перемножимъ соотвѣтственныя части равенствъ

$$xy = (a + \alpha)(b + \beta) = ab + \alpha b + a\beta + \alpha\beta$$

Здѣсь сумма

$$\alpha b + a\beta + \alpha\beta$$

есть величина безконечномалая, обозначимъ ее ω тогда

$$xy = ab + \omega$$

Отсюда

$$ab - xy = \omega$$

т. е. разность между постоянной величиной ab и перемѣнной xy есть величина безконечномалая а потому

$$\text{пр}\ (xy) = ab = \text{пр}\ (x)\ \text{пр}\ (y) \qquad (4)$$

Не трудно распространить этотъ выводъ на случай произведенія нѣсколькихъ перемѣнныхъ.

Слѣдствіе. Предѣлъ произведенія постояннаго числа на перемѣнную равенъ произведенію постояннаго на предѣлъ перемѣнной.

Если въ послѣднемъ выраженіи y будетъ величиной постоянной равной напр. a то будемъ имѣть:

$$\text{пр}\ (ax) = \text{пр}\ (x)\ \text{пр}\ (a)$$

но

$$\text{пр}\ (a) = a$$

и потому

$$\text{пр.}\ (ax) = a\ \text{пр}\ (x)$$

§ 14. Предѣлъ отношенія двухъ функцій равенъ отношенію предѣловъ этихъ функцій.

Всегда справедливо

$$\frac{z}{y}\, y = z.$$

Беремъ предѣлы обѣихъ частей

$$\text{пр}\left(\frac{z}{y}\right)\ \text{пр}\ (y) = \text{пр}\ z$$

Дѣля обѣ части на пр (y) имѣемъ

$$\text{пр}\left(\frac{z}{y}\right) = \frac{\text{пр. } z}{\text{пр. } y}, \qquad (5)$$

что и требовалось найти.

§ 15 Предѣлъ степени функціи равенъ степени предѣла этой функціи

$$x^n = x \,.\, x \ldots x\,.$$

Беря предѣлы обѣихъ частей получимъ.

$$\text{пр. } (x^n) = \text{пр. } x \,.\, \text{пр. } x \ \text{пр. } x \ldots = (\text{пр. } x)^n$$

§ 16. Предѣлъ корня функціи равенъ корню той же степени предѣла функціи.

Обозначимъ

$$\sqrt[n]{x} = p$$

тогда

$$x = p^n$$

Беремъ предѣлы обѣихъ частей.

$$\text{пр. } x = \text{пр. } (p^n) = (\text{пр. } p)^n$$

Извлекая корень n-й степени находимъ

$$\sqrt[n]{\text{пр } x} = \text{пр } (p) = \text{пр. } (\sqrt[n]{x}),$$

или

$$\text{пр } (\sqrt[n]{x}) = \sqrt[n]{\text{пр } x}$$

III О геометрическихъ величинахъ или векторахъ

§ 17. Понятіе о геометрическихъ величинахъ.

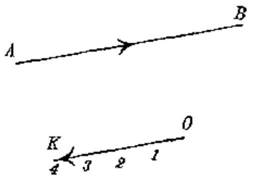
Геометрическими величинами или векторами называются такія величины, которыя кромѣ численнаго значенія имѣютъ опредѣленное положеніе и направленіе въ пространствѣ*). Всякій векторъ

*) Терминъ «векторъ» происходитъ отъ латинскаго слова «vehere» — везти.

Величины же, не имѣющія направленія, называютъ скалярами, производя послѣдній терминъ отъ англійскаго слова «to scale», что значитъ вѣсить, мѣрить.

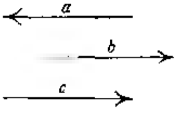
можетъ быть изображенъ нѣкоторымъ прямолинейнымъ отрѣзкамъ дан ной длины. Такой отрѣзокъ будетъ опредѣляться слѣдующими элементами: 1) своей величиной, 2) извѣстнымъ положеніемъ въ простран ствѣ, подъ которымъ разумѣютъ положеніе той прямой линіи (или па раллельной ей), часть которой векторъ составляетъ, и 3) направле ніемъ въ смыслѣ движенія по этой прямой для отложенія длины век тора въ ту или другую сторону отъ произвольной точки на прямой.

Подъ терминомъ: «направленіе» часто разумѣютъ оба послѣдніе элемента, опредѣляющіе векторъ, говоря, что всякій векторъ имѣетъ опредѣленную величину и направленіе. Для избѣжанія недоразумѣній слѣдуетъ всегда различать, въ какомъ смыслѣ употребляется слово: «направленіе». Съ этой же цѣлью предлагаютъ называть элементы вектора соотвѣтственно величиной, напр вленіемъ и теченіемъ вектора въ ту или другую сторону.



4

Такимъ образомъ если требуется по строить векторъ, равный (4), положеніе котораго опредѣлнется линіей AB (фиг. 4) при чемъ положитель нымъ будетъ напрввленіе отъ A къ B обозначенное стрѣлкой то проводимъ черезъ нѣкоторую точку O прямую паралельную AB. Такъ какъ передъ величиной заданнаго вектора стоитъ знакъ минусъ, то въ опредѣлен номъ масштабѣ откладываемъ четыре единицы идя въ направленіи обратномъ, указанному стрѣлкой. Векторъ OK будетъ требуемый. На правленіе вектора обозначается стрѣлкой Для отличія геометрической величины отъ алгебрической надъ первой ставятъ черту, такъ напр построенный на фиг 5 векторъ долженъ быть обозначенъ $\overline{OK}$.



5

Для равенства геометрическихъ величинъ необходимо, чтобы кромѣ численнаго значенія онѣ имѣли одинаковое направленіе, т. е. были между собою паралельны и направлены въ одну и ту же сторону Такъ напр вектора b и c (фиг. 5) между собою равны вектора же a и c равны лишь по абсолютной величинѣ, но различны по знаку

Вектора, разсматриваемые въ механикѣ, обыкновенно являются величи нами перемѣнными, представляя собою функціи времени, слѣдовательно, чер тежъ даетъ значеніе вектора для опредѣленнаго мгновенія.

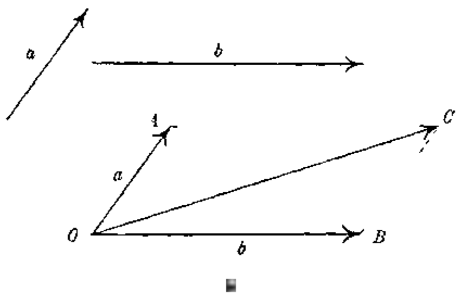
§ 18 Дѣйствія надъ геометрическими величинами.

а. Сложеніе векторовъ. Для сложенія двухъ данныхъ векто ровъ a и b поступаютъ такъ (фиг 6):

Изъ произвольной точки пространства O проводятъ линіи, паралельныя даннымъ векторамъ a и b, откладываютъ на нихъ отрѣзки OA и OB, равные соотвѣтственно векторамъ a и b; строятъ на нихъ паралелограмъ $OACB$, тогда діагональ паралелограмма OC называется **геометрической суммой** данныхъ векторовъ OA и OB, что обозначается такъ:

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB}.$$

Поставленныя надъ слагаемыми черточки показываютъ что мы имѣемъ дѣло съ сложеніемъ геометрическихъ величинъ



Вектора OA и OB называются **слагаемыми** или **составляющими**, OC—**составнымъ векторомъ** или, какъ сказано, **геометрической суммой**. Самый способъ сложенія называютъ часто по виду получаемой фигуры **правиломъ паралелограма** *).

Если бы данные вектора OA и OB были проведены изъ одной точки, то построеніе паралелограма проще всего можетъ быть произведено на самыхъ слагаемыхъ векторахъ.

Геометрическую сумму можно найти и такъ: если OA и OB суть данные вектора, то изъ точки A проведемъ линію паралельную OB и отложимъ на ней часть $AC = OB$. Соединивъ точку C и точку O найдемъ геометрическую сумму OC. Построеніе паралелограмъ замѣняется такимъ образомъ построеніемъ треугольника.

Нужно обратить самое строгое вниманіе на **направленіе** слагаемыхъ векторовъ; строя напр. треугольникъ, откладывать величины векторовъ отъ данной точки такъ чтобы идя послѣдовательно по нимъ, мы шли бы постоянно **по направленію стрѣлокъ**; въ паралелограмѣ оба слагаемые вектора имѣютъ или направленія сходящіяся къ точкѣ O, или расходящіяся отъ нея.

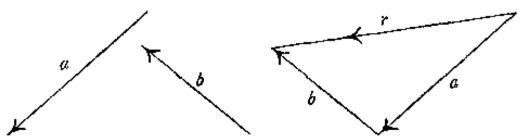
Если мы въ треугольникѣ OAC будемъ двигаться отъ точки O по составляющимъ OA и AC въ направленіи, указанномъ стрѣлками то дойдя до точки C увидимъ, что составной векторъ OC будетъ

*) Правило паралелограма, основное правило геометрическаго сложенія, какъ ясно изъ сказаннаго, не представляетъ собою какой-либо теоремы, а является условнымъ опредѣленіемъ, обобщающимъ и упрощающимъ во многихъ случаяхъ способъ выраженія какъ это мы увидимъ далѣе

имѣть обратное направленіе, т. е. будетъ представлять замыкающую сторону треугольника, построеннаго на составляющихъ векторахъ, или замыкающую ломаную линію *OAC*. Такимъ образомъ геометрической суммой двухъ данныхъ векторовъ называется векторъ замыкающій ломаную составленную изъ данныхъ векторовъ.

Если бы требовалось сложить два вектора a и b (фиг. 7), то треугольникъ долженъ быть построенъ такъ какъ это указано на чертежѣ, гдѣ r является замыкающей стороной, представляя такимъ образомъ геометрическую сумму, т. е.

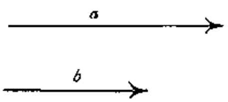
$= a + b$



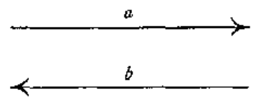
7

Разумѣется, безразлично въ какомъ порядкѣ ни производить сложеніе, результатъ будетъ одинъ и тотъ же, какъ то можно видѣть изъ треугольниковъ, образующихъ паралелограмъ

Въ частномъ случаѣ, если вектора a и b паралельны (фиг. 8) геометрическая сумма будетъ равна ихъ алгебрической суммѣ. Если два вектора въ этомъ случаѣ равны по величинѣ, но обратно направлены (фиг 9) то сумма ихъ равна нулю



8



9

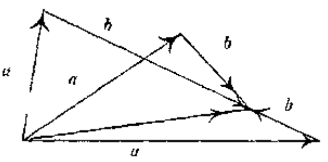
б) Разложеніе векторовъ Дѣйствіе обратное сложенію векторовъ называется разложеніемъ. Если намъ данъ векторъ r то онъ можетъ быть разложенъ геометрически на два составляющихъ вектора безконечнымъ числомъ способовъ, если относительно составляющихъ не сдѣлано никакихъ ограниченій. Во всякомъ треугольникѣ въ которомъ данный векторъ r будетъ замыкающимъ двѣ другія стороны, направленныя обратно вектору r, опредѣлятъ собою величины слагаемыхъ векторовъ (фиг. 10).

Разложеніе сдѣлается опредѣленнымъ тогда, когда будетъ достаточно данныхъ для построенія одного опредѣленнаго треугольника а это будетъ въ одномъ изъ слѣдующихъ случаевъ:

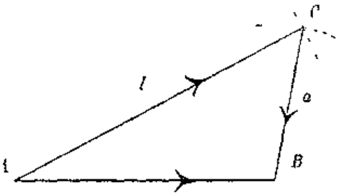
1) Даны величины векторовъ a и b, на которые долженъ быть разложенъ данный векторъ r (фиг. 11). Взявъ концы вектора r за

центры, описываемъ дуги круга радіусами, равными величинамъ векторовъ a и b. Точку A пересѣченія ихъ соединяемъ съ концами вектора r. Въ полученномъ треугольникѣ даемъ направленія a и b, согласно указанному на чертежѣ. Рѣшеніе вопроса въ разсматриваемомъ случаѣ сводится, очевидно къ построенію треугольника по тремъ даннымъ сторонамъ.

2) Даны положенія искомыхъ a и b въ пространствѣ (фиг 11.) Изъ концовъ вектора r проводимъ линіи, параллельныя a и b, до пе



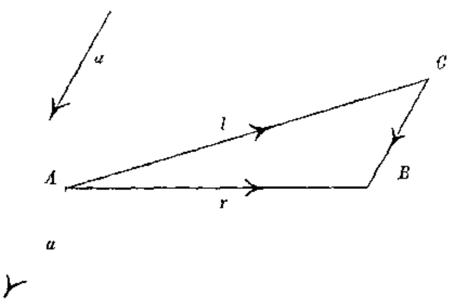
10.



11

ресѣченія ихъ между собою въ точкѣ C. Стороны полученнаго треугольника AC и CB и опредѣлятъ собою величины векторовъ a и b.

3) Данъ векторъ a, одинъ изъ двухъ векторовъ, на которые долженъ быть разложенъ векторъ r (фиг. 12). Къ концу B вектора r пристраиваемъ векторъ a. Соединивъ затѣмъ точку A съ точкою C найдемъ искомый векторъ b. Векторъ a долженъ быть проведенъ по отношенію къ r такъ, чтобы направленія ихъ сходились между собою въ общей точкѣ. Поэтому возможно, напр., провести a изъ точки A согласно указанному пунктиромъ. Въ данномъ случаѣ имѣемъ



12

$$a + b = r$$

или

$$b = \bar{r} - \bar{a}$$

Векторъ b является такимъ образомъ **геометрической разностью** векторовъ a и r. Ввиду этого разсматриваемое дѣйствіе, посредствомъ котораго по суммѣ и одному изъ слагаемыхъ находится второе, называется также **геометрическимъ вычитаніемъ**.

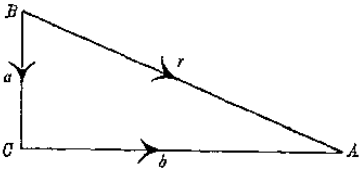
§ 19 Соотношеніе между геометрической суммой и слагаемыми векторами

Если r есть замыкающій бокъ треугольника ABC (фиг. 12) а a и b составляющіе, то извѣстно изъ геометріи, что

$$r^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos ACB$$

Здѣсь черточки надъ векторами a, b и r опускаемъ потому, что при возвышеніи вектора въ квадратъ рѣчь можетъ идти только о величинѣ его, но не о направленіи; другими словами, получаемая величина теряетъ при этомъ геометрическія свойства вектора. То же относится и къ произведенію двухъ или нѣсколькихъ векторовъ.

Для обобщенія формулы является болѣе удобнымъ уголъ ACB въ треугольникѣ замѣнить угломъ между векторами a и b.



13

Угломъ между двумя векторами называется тотъ, къ вершинѣ котораго оба направленія векторовъ сходятся или отъ вершины котораго расходятся Такимъ образомъ въ данномъ случаѣ изъ четырехъ угловъ, образуемыхъ пересѣченіемъ линій AC и CB и ихъ продолженій, долженъ быть взятъ одинъ изъ тупыхъ угловъ при точкѣ C. Обозначая этотъ уголъ черезъ $\angle(\bar{b}, \bar{a})$, получимъ

$$\angle ACB = 180^\circ - \angle(\bar{b}, \bar{a})$$

а потому

$$\cos ACB = -\cos(\bar{b}, \bar{a})$$

слѣдовательно

$$r^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\bar{b}, \bar{a}) \ldots \qquad (6)$$

Не трудно видѣть, что въ такомъ видѣ формула будетъ одинаково пригодна какъ для стороны, лежащей противъ остраго, такъ и противъ тупого угла.

Въ частномъ случаѣ, когда треугольникъ прямоугольный и замыкающимъ бокомъ его будетъ гипотенуза (фиг 13) находимъ

$$\bar{r} = \bar{a} + \bar{b}$$

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= a^2 + b^2 \\ r &= \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}\right\} \qquad (6a)$$

Но не трудно убѣдиться, что мы придемъ къ тѣмъ же формуламъ (6а, въ случаѣ, когда замыкающей стороной будетъ одинъ изъ катетовъ (фиг. 14): пусть такимъ будетъ катетъ a. Тогда имѣемъ:

$$a^2 = b^2 + r^2 + 2br \cos(\bar{b}, \bar{r})$$

но

$$\cos(b, r) = \cos BAC = \frac{b}{r}$$

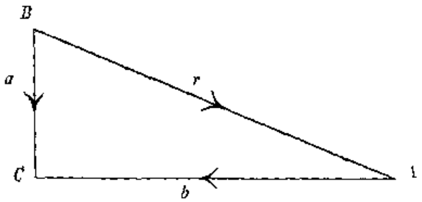
а потому

$$a^2 = b^2 + r^2 - 2br\frac{b}{r} = r^2 - b^2$$

откуда

$$r^2 = a^2 + b^2$$

Не трудно найти углы, которые образуетъ составной векторъ съ составляющими; дѣйствительно:



14

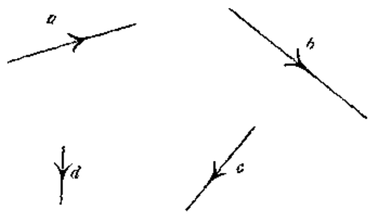
$$\cos(r, a) = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$\cos(r, b) = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + a^2}}$$

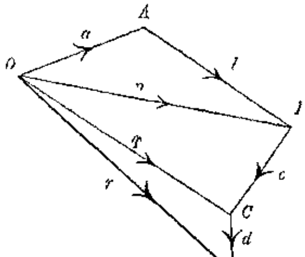
Такимъ образомъ, имѣя данными a и b, можемъ начертить r и не прибѣгая къ построенію треугольника.

§ 20. Сложеніе нѣсколькихъ векторовъ. Пусть требуется сложить вектора a, b, c и d (фиг. 15).

Примѣнимъ для этого указанное правило для сложенія двухъ векторовъ. Сложимъ первоначально a и b (фиг. 16).



15



16

Сумма ихъ будетъ p; затѣмъ сложимъ p и c; найдемъ q. Наконецъ сложимъ q и d; получимъ векторъ r, который и представитъ искомую сумму, т. е.

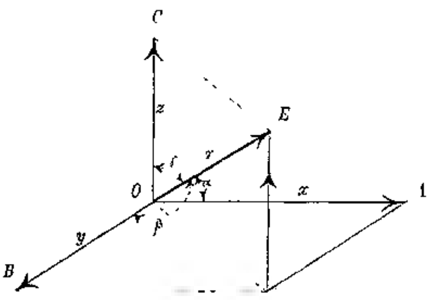
$$\overline{r} = q + d = p + c + d = a + \overline{b} + c + \overline{d}$$

Разсматривая многоугольникъ $OABCD$, видимъ, что стороны его суть слагаемые вектора; они имѣютъ одинаковое направленіе въ томъ смыслѣ, что переходя постепенно отъ точки O къ A, B, C и D мы будемъ двигаться по направленіямъ, совпадающимъ съ направленіями каждаго изъ векторовъ; геометрическая же сумма есть замыкающая сторона многоугольника. Итакъ, для нахожденія геометрической суммы данныхъ векторовъ слѣдуетъ построить на нихъ многоугольникъ; замыкающій бокъ многоугольника представитъ собою геометрическую сумму или составной векторъ. Правило это называется правиломъ многоугольника. Въ частномъ случаѣ если $r = 0$ т е

$$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + d = 0$$

то многоугольникъ замыкается самъ собою

§ 21 Сложеніе трехъ взаимноперпендикулярныхъ векторовъ. Изъ частныхъ случаевъ наиболѣе часто встрѣчается тотъ, когда слагаемые вектора въ числѣ трехъ направлены подъ прямыми углами другъ къ другу. Пусть будутъ даны три вектора x, y, z (фиг. 17).



17

Поступая по изложенному правилу, изъ точки A проведемъ векторъ AD равный OB; изъ точки D проведемъ векторъ DE, равный OC. Соединивъ O съ E, найдемъ составной векторъ r представляющій геометрическую сумму данныхъ векторовъ, т. е

$$r = x + y + \bar{z} \ldots \qquad (7)$$

Не трудно видѣть, что онъ равенъ діагонали параллелепипеда, построеннаго на составляющихъ векторахъ. Изъ геометріи знаемъ что

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Углы же α β, γ, составляемые діагональю съ каждымъ изъ реберъ x y z находятся изъ слѣдующихъ выраженій

$$\left.\begin{aligned} \cos(r\, x) &= \cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \cos(r\, y) &= \cos\beta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \cos(r\, z) &= \cos\gamma = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Въ частномъ случаѣ когда $z = 0$ получаемъ параллелограмъ

Если составной векторъ разложенъ по тремъ взаимноперпендикулярнымъ направленіямъ, то онъ будетъ равенъ нулю только въ томъ случаѣ, если каждый изъ составляющихъ равенъ нулю, дѣйствительно для того чтобы

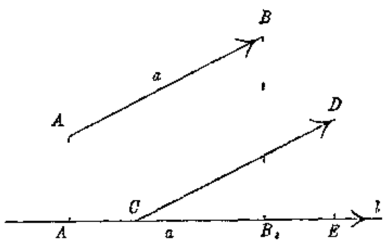
$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

т. е. сумма трехъ положительныхъ слагаемыхъ равнялась нулю необходимо, чтобы въ отдѣльности было.

$$x = 0$$
$$y = 0$$
$$z = 0$$

Подобнымъ же образомъ, если составной векторъ разложенъ по двумъ взаимноперпендикулярнымъ направленіямъ, то для того, чтобы онъ былъ равенъ нулю, каждый изъ слагаемыхъ векторовъ долженъ быть въ отдѣльности нулемъ.

И обратно, если геометрическая сумма трехъ взаимноперпендикулярныхъ векторовъ при извѣстныхъ условіяхъ обращается въ нуль, то каждый изъ слагаемыхъ векторовъ при этихъ условіяхъ въ отдѣльности также равенъ нулю.



18

Изъ только что изложеннаго ясно, что три взаимноперпендикулярные вектора, будучи сложены, даютъ вполнѣ опредѣленный составной векторъ. Вслѣдствіе этого всякій векторъ можетъ быть данъ посредствомъ трехъ взаимноперпендикулярныхъ векторовъ.

§ 22. Проекція вектора на ось. Пусть будутъ даны (фиг. 18) векторъ a и нѣкоторая линія l имѣющая опредѣленное направленіе, указанное стрѣлкой, иначе — ось l. Векторъ a и ось l не лежатъ, вообще говоря, въ одной плоскости.

Опустимъ изъ концовъ вектора a перпендикуляры на ось l, для чего, какъ извѣстно, слѣдуетъ черезъ точки A и B провести плоскости, перпендикулярныя къ оси l, и точки пересѣченія A_1 и B_1 оси съ плоскостями соединить съ точками A и B. Точки A и B носятъ названіе проекцій (проложеній) точекъ A и B; отрѣзокъ же A_1B_1 называется проекціей (проложеніемъ) вектора a на линію l, называемую осью проекцій (проложеній).

Проекція вектора можетъ быть построена и такимъ образомъ изъ какой либо точки C линіи l проведемъ векторъ CD, равный данному вектору a; изъ конца его D опустимъ перпендикуляръ на линію l отрѣзокъ CE представитъ искомую проекцію, такъ какъ $CE = A_1B_1$.

При взятомъ направленіи вектора a направленіе проекціи принимается отъ A_1 къ B_1; такъ какъ направленіе это совпадаетъ съ направленіемъ оси l, то проекціи A_1B_1 приписывается знакъ $+$ въ противномъ случаѣ проекцію берутъ со знакомъ $-$

§ 23. Зависимость между векторомъ и его проекціей на ось

Изъ фиг. 18 усматриваемъ, что

$$CE = CD \cos DCL$$

или

$$a_1 = a \cos (a, a_1)$$

Если бы ось имѣла обратное направленіе, то получили бы

$$\angle DCE = 180^\circ - \angle (a, a_1),$$

и кромѣ того проекція a_1 должна быть взята со знакомъ минусъ

Слѣдовательно

$$a_1 = -a \cos [180^\circ - (a, a_1)] = -a [-\cos (a, a_1)] = a \cos (a, a_1),$$

т. е. проекція даннаго вектора на произвольную ось равна произведенію вектора на cos угла между направленіями вектора и оси.

§ 24. Проекція геометрической суммы нѣсколькихъ векторовъ на произвольную ось равна алгебрической суммѣ проекцій этихъ векторовъ

Пусть имѣемъ (фиг. 19)

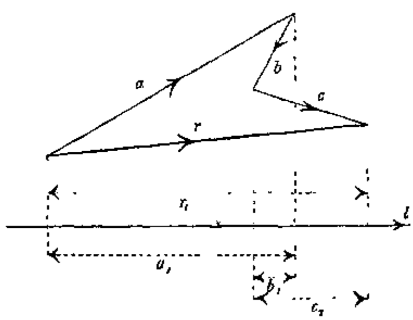
$$r = \bar{a} + b + c$$

проекція $(a) = a_1 = a \cos (a, l)$

проекція $(b) = b_1 = b \cos (b, l)$

проекція $(c) = c_1 = c \cos (c, l)$

проекція $(r) = r_1 = r \cos (r, l)$



19

Но изъ чертежа находимъ

$$r_1 = a_1 + b_1 + c_1$$

или подставляя

$$r \cos (r, l) = a \cos (a, l) + b \cos (b, l) + c \cos (c, l),$$

что и требовалось доказать

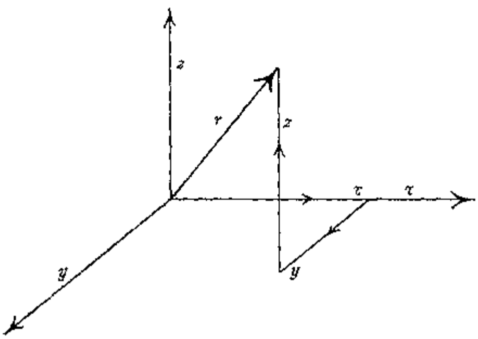
Вообще для произвольнаго числа векторовъ $a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n$ проектируемыхъ на какую либо ось l получимъ:

$$r \cos (r, l) = a_1 \cos (a_1, l) + a_2 \cos (a_2, l) + a_3 \cos (a_3, l) + \ldots a_n \cos (a_n, l). \qquad (10)$$

Для краткости письма послѣднее выраженіе, въ которомъ мы имѣемъ сумму членовъ, составленныхъ по одному образцу, можетъ быть изображено такъ

$$r \cos (r, l) = \sum_{i=1}^{i=n} a_i \cos (a_i, l) \tag{11}$$

гдѣ $a_i \cos (a_i, l)$ есть общій членъ суммы, называемый такъ потому, что, полагая въ немъ i равнымъ послѣдовательно 1, 2, 3 ... n, мы можемъ получить всѣ члены суммы. Знакъ Σ (сигма) показываетъ что нужно взять сумму подобныхъ членовъ; а значки, поставленные снизу и сверху Σ, даютъ предѣлы, въ какихъ производится суммированіе т. е. указываютъ номера перваго и послѣдняго членовъ.



20

Послѣднее выраженіе пишутъ и такимъ образомъ

$$\sum_1^n a_i \cos (a_i, l)$$

или, предполагая число членовъ извѣстнымъ, откидываютъ значки у сигмы и у буквы a и получаютъ

$$\sum a \cos (a, l)$$

Если r будетъ направлено въ обратную сторону, то всѣ стороны многоугольника будутъ имѣть одинаковое направленіе и мы получимъ:

$$-r \cos (r, l) = \sum a \cos (a, l),$$

откуда

$$r \cos (r, l) + \sum a \cos (a, l) = 0$$

§ 25. Проекціи вектора на три взаимноперпендикулярныя оси.

Разложимъ данный векторъ r по тремъ взаимноперпендикулярнымъ направленіямъ: Ox, Oy и Oz (фиг. 20). Будемъ имѣть

$$\overline{r} = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z}$$

и на основаніи только что выведеннаго для нѣкотораго направленія l.

$$r \cos (r, l) = x \cos (x, l) + y \cos (y, l) + z \cos (z, l) \tag{12}$$

Беря за ось проекцій направленіе оси Ox будемъ имѣть

$$r \cos (r, x) = x \cos (x, x) + y \cos (y, x) + z \cos (z, x)$$

но

$$\cos(x, x) = \cos 0^\circ = 1$$
$$\cos(y, x) = \cos 90^\circ = 0$$
$$\cos(z, x) = \cos 90^\circ = 0$$

а потому

Точно такъ же

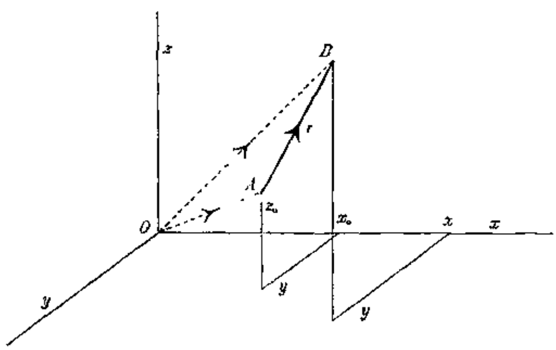
$$\left.\begin{aligned} r\cos(r, x) &= x \\ r\cos(r, y) &= y \\ r\cos(r, z) &= z \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Если векторъ r разложенъ по двумъ направленіямъ Ox и Oy, лежащимъ, очевидно, въ одной плоскости съ r, то имѣемъ только два уравненія

$$\left.\begin{aligned} r\cos(r, x) &= x \\ r\cos(r, y) &= y \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

§ 26. Соотношеніе между длиной вектора и координатами конечныхъ точекъ его.

Принимая оси проекцій Ox, Oy и Oz за оси координатъ, будемъ



21

имѣть, что вектора x, y и z суть вмѣстѣ съ тѣмъ координаты конца составного вектора r, а потому мы можемъ сказать, что векторъ, проведенный изъ начала осей координатъ, равенъ геометрической суммѣ координатъ конца вектора.

Если же данный векторъ не будетъ проходить черезъ начало осей (фиг. 21), то для нахожденія зависимости между нимъ и координатами начала и конца его, соединимъ точки A и B съ началомъ координатъ линіями OA и OB, давъ имъ направленія, согласно ука занному на чертежѣ. Тогда можемъ написать

$$\bar r = \overline{OB} - \overline{OA}$$

но по только что доказанному,

$$\overline{OB} = \bar x + \bar y + \bar z$$

$$\overline{OA} = \bar x_0 + \bar y_0 + \bar z_0$$

откуда

$$\bar r = (\bar x + \bar y + \bar z) - (\bar x_0 + \bar y_0 + \bar z_0)$$

или

$$\bar r = (\bar x - \bar x_0) + (\bar y - \bar y_0) + (\bar z - \bar z_0)$$

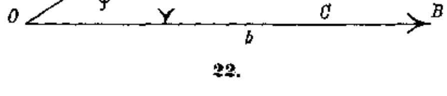
Каждая изъ геометрическихъ разностей, стоящихъ въ скобкахъ, можетъ быть замѣнена алгебрической, такъ какъ одноименныя координаты одинаковы по направленію, а потому:

$$\bar r = \overline{(x - x_0)} + \overline{(y - y_0)} + \overline{(z - z_0)};$$

а такъ какъ оси взаимноперпендикулярны, то

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \quad . \quad . \qquad (15)$$

Въ изложеніи курса механики намъ часто придется пользоваться правилами геометрическаго сложенія. Правила эти будутъ примѣнимы во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда механическія величины могутъ быть изображены векторами (скорости, ускоренія, силы и т. д.); но въ виду того, что понятіе о геометрической суммѣ есть простое опредѣленіе, для примѣненія относящихся сюда положеній, всякій разъ необходимо доказать, что тѣ или другія величины могутъ быть складываемы или вычитаемы какъ векторы. Какъ только это будетъ доказано въ простѣйшемъ случаѣ въ видѣ правила параллелограма, тотчасъ же все, касающееся соотношенія между геометрической суммой и слагаемыми векторами, можетъ быть безъ дальнѣйшихъ оговорокъ примѣнено къ изучаемому виду векторовъ.



22.

§ 27. О геометрическомъ произведеніи.

Геометрическимъ произведеніемъ двухъ величинъ или произведеніемъ двухъ векторовъ a и b (фиг. 22) называется произведеніе изъ величинъ ихъ на косинусъ угла φ между ихъ направленіями; обозначая это произведеніе p, имѣемъ

$$p = a\,b \cos\varphi$$

но

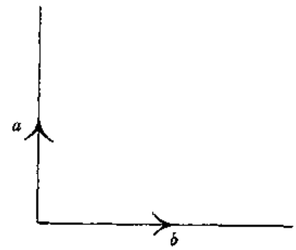
$$a \cos\varphi = OC$$

а потому

$$p = b \cdot OC$$

т. е. геометрическое произведеніе можетъ быть получено умноженіемъ одного изъ векторовъ на проекцію второго на направленіе перваго.

Въ частномъ случаѣ, если вектора a и b между собою перпендикулярны (фиг. 23) ихъ геометрическое произведеніе равно нулю.



23

Найдемъ, какъ выражается геометрическое произведеніе двухъ векторовъ посредствомъ проекцій ихъ на три взаимноперпендикулярныя оси (фиг. 24).

Даны вектора r_1 и r_2, имѣющіе проекціями x_1, y_1, z_1, и x_2, y_2, z_2.

По опредѣленію

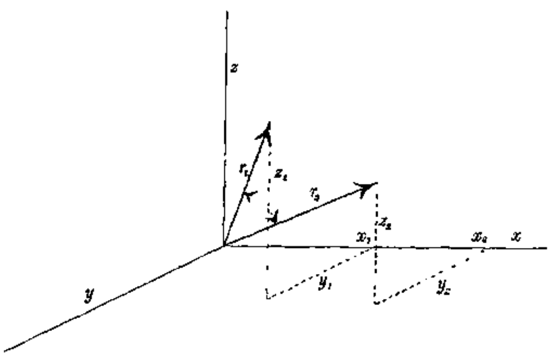
$$\bar{r}_1 = \bar{x}_1 + \bar{y}_1 + \bar{z}_1$$

Беря проекцію этой суммы на направленіе второго вектора r_2, находимъ

$$r_1 \cos(r_1, r_2) = x_1 \cos(x_1, r_2) + y_1 \cos(y_1, r_2) + z_1 \cos(z_1, r_2).$$

Умножая на r_2

$$r_1 r_2 \cos(r_1, r_2) = x_1 r_2 \cos(x_1, r_2) + y_1 r_2 \cos(y_1, r_2) + z_1 r_2 \cos(z_1, r_2)$$



24

и замѣчая, что

$$r_2 \cos(x_1, r_2) = x_2$$

$$r_2 \cos(y_1, r_2) = y_2$$

$$r_2 \cos(z_1, r_2) = z_2$$

окончательно получимъ

$$r_1 r_2 \cos(r_1, r_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 . \qquad (16)$$

т. е. геометрическое произведеніе двухъ векторовъ равняется суммѣ произведеній соотвѣтственныхъ проекцій на три прямоугольныя оси.

§ 28 Задачи.

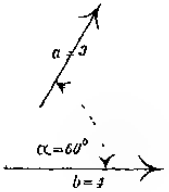
1. Даны вектора: a и b (фиг. 25). Найти а) $\bar{r} = \bar{a} + \bar{b}$; б) $\bar{r} = a - \bar{b}$; в) $\bar{r} = \bar{b} - \bar{a}$.

Даны вектора a, b и c (фиг. 26).

Найти: а) $\bar{r} = \bar{a} + \bar{b} + c$

б) $r = a + b - c$

в) $r = \bar{a} - b - c$

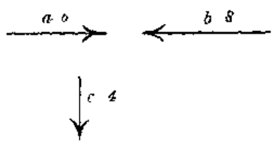


25.

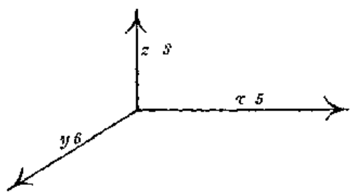
3. Найти сумму проекцій векторовъ a, b и c (фиг. 26): а) на вертикальную ось, направленную сверху внизъ; б) на такую же ось, обратно направленную; в) на ось, направленную вправо подъ угломъ въ 45° къ горизонту

4. Даны вектора: x, y и z (фиг. 27):

Найти: $\bar{r} = x + \bar{y} + z$.



26



27

Рѣшенія задачъ

2. а) $r = \sqrt{2^2 + 4}$; б) r имѣетъ ту же величину, но другое направленіе.

3. а) 4; б) — 4

4. Выраженіе (8) § 21

КИНЕМАТИКА.

ГЛАВА I

Опредѣленіе движенія. Зависимость между разстояніемъ и временемъ.

§ 29. Данныя, необходимыя для опредѣленія движенія точки.

Движеніе данной геометрической точки будетъ вполнѣ опредѣлено (задано), если мы будемъ располагать данными, позволяющими найти въ любое мгновеніе положеніе движущейся точки въ пространствѣ.

Послѣдовательныя положенія, занимаемыя въ пространствѣ движущейся точкой, образуютъ, вообще говоря, нѣкоторую воображаемую линію, называемую **траекторіей точки**, которая представляетъ путь, проходимый точкой. По своей формѣ траекторія можетъ быть линіей прямой или кривой, поэтому движеніе точки въ этомъ отношеніи раздѣляютъ на два вида: **прямолинейное** и **криволинейное**.

Одинъ изъ способовъ опредѣленія движенія, на разсмотрѣніи котораго мы теперь остановимся, заключается въ слѣдующемъ: указываютъ **траекторію**, т. е. даютъ форму этой кривой, а затѣмъ положеніе ея въ пространствѣ тѣмъ или другимъ способомъ, о чемъ скажемъ далѣе. Затѣмъ указываютъ данныя, посредствомъ которыхъ можно опредѣлить, въ какой точкѣ траекторіи находится въ данное мгновеніе движущаяся точка. Для этого поступаютъ такъ:

Выбираютъ на траекторіи нѣкоторую постоянную для изучаемаго движенія точку и отъ нея отсчитываютъ разстоянія, на которыхъ точка отстоитъ въ различныя мгновенія. Такой точкѣ присваиваютъ названіе **начала разстояній**. Опредѣляютъ направленіе, въ какомъ отъ начала разстояній отсчитываютъ **положительныя разстоянія**, въ обратномъ направленіи откладываютъ **отрицательныя** разстоянія. Наконецъ, нужно указать, **какими единицами** должны измѣряться разстоянія: метрами, футами и т. п. Имѣя эти данныя, мы всегда можемъ указать то мѣсто, которое занимаетъ движущаяся точка или тѣло на траекторіи по прохожденіи имъ извѣстнаго разстоянія *).

---

*) Мы избѣгаемъ употребленія выраженія: пройденное точкою **пространство**, такъ какъ съ этимъ словомъ связывается представленіе о нѣкоторомъ объемѣ, имѣющемъ три измѣренія, тогда какъ разстоянія, проходимыя точкою, измѣряются, очевидно, единицами длины. Для обозначенія пройденнаго разстоянія мы впрочемъ удерживаемъ принятое повсюду обозначеніе — s (spatium—пространство), хотя было бы послѣдовательнѣе принять букву l (longitudo—длина).

Подобнымъ же образомъ нужно условиться относительно измѣренія времени, а именно: нужно выбрать **начало временъ** т. е. такое **мгновеніе** или, какъ часто называютъ, **моментъ времени** отъ котораго будутъ отсчитываться **промежутки времени** той или другой **длительности** или **величины**. Кромѣ того должна быть выбрана **единица** для измѣренія времени: секунда, сутки и др. При помощи этихъ данныхъ всякое мгновеніе можетъ быть точно опредѣлено; напр. если тѣло двигалось въ продолженіе промежутка времени, равнаго $3^1/_2$ суткамъ, причемъ за начало временъ принято 8 ч. вечера 15 декабря 1905 г. то мгновеніе, опредѣляющее конецъ этого промежутка, есть 8 час. утра 19 декабря 1905 г.

§ 30. Объ опредѣленіи траекторіи.

Заданіе траекторіи въ случаѣ движенія точки въ плоскости можетъ быть произведено простымъ начертаніемъ ея. Но подобный способъ, обладая указанными выше недостатками, общими всякому графическому пріему, можетъ иногда оказаться неудобнымъ при движеніи точки въ пространствѣ. Тогда прибѣгаютъ къ способу опредѣленія траекторіи въ осяхъ координатъ, задавая ея уравненіемъ, указывающимъ зависимость между координатами отдѣльныхъ точекъ ея подобно тому, какъ мы это имѣли выше (§ 6,3).

§ 31. Зависимость между разстояніемъ и временемъ.

Такъ какъ мы желаемъ знать положеніе точки на траекторіи въ любое, опредѣленное указаннымъ образомъ мгновеніе, намъ необходимо знать, какъ будутъ измѣняться съ теченіемъ времени разстоянія движущейся точки отъ начала разстояній, каковы будутъ перемѣщенія точки или разстоянія, проходимыя ею по траекторіи въ извѣстный промежутокъ времени, короче говоря нужно знать зависимость между **произвольно выбираемыми** промежутками времени и **соотвѣтствующими** имъ разстояніями. Какъ ясно изъ общей характеристики движенія, и время и разстоянія (отсчитываемыя **каждое** отъ **своего** начала) въ продолженіе этого движенія мѣняются, то и другое суть величины **перемѣнныя** но между ними та существенная разница, что промежутокъ времени мы опредѣляемъ сами по нашему произволу и уже въ зависимости отъ этого промежутка мы находимъ разстояніе. Такимъ образомъ, согласно изложенному въ § 5, время является **перемѣнной независимой**, разстояніе же **функціей времени**.

Замѣтимъ, что въ тѣхъ случаяхъ, когда мы говоримъ только о фактѣ измѣненія тѣломъ положеній, занимаемыхъ имъ въ пространствѣ мы употребляемъ терминъ «движеніе», когда же насъ интересуетъ **длина**, на которую тѣло передвинулось, мы говоримъ: пройденное разстояніе перемѣщеніе

Слѣдуетъ различать опредѣленія пройденный путь и пройденное разстояніе. Такъ напр., если два какихъ либо селенія удалены одно отъ другого на 20 верстъ, считая по соединяющей ихъ дорогѣ, то при переходѣ путника изъ одного селенія въ другое разстояніе, имъ пройденное, составитъ 20 верстъ путь же можетъ превышать эту величину, такъ какъ путникъ можетъ возвращаться назадъ, проходя по одному и тому протяженію нѣсколько разъ.

Далѣе, слѣдуетъ различать выраженія: разстояніе точки (до начала разстояній въ такое то мгновеніе) и разстояніе, пройденное точкой въ данный промежутокъ времени. Разницу между ними можно видѣть на слѣдующемъ примѣрѣ. пусть точка въ началѣ временъ (начальное мгновеніе) находилась на разстояніи 5 м. отъ начала разстояній и затѣмъ въ теченіе 2 сек. прошла разстояніе въ 4 м. Тогда разстояніе точки въ концѣ 2-й сек. составитъ 9 м разстояніе же, пройденное точкой въ двѣ сек. будетъ равно 4 м

Зависимость между временемъ и разстояніемъ точки (считая его отъ начала разстояній), подобно всякой другой зависимости между перемѣнной независимой и функціей ея, можетъ быть дана однимъ изъ слѣдующихъ способовъ (§ 6):

1) Аналитически, посредствомъ уравненія, связывающаго обѣ перемѣнныя (разстояніе и время) между собою, напр

$$s \quad 9t^2 \quad 3$$

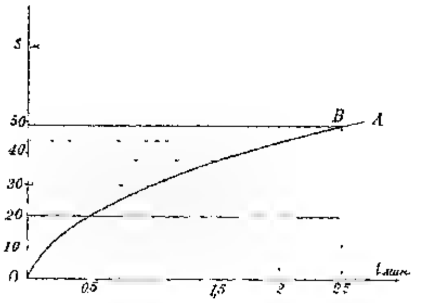
гдѣ знакъ s обозначаетъ пройденное разстояніе, а t — время, протекшее отъ начала временъ. Написанное уравненіе можетъ быть названо уравненіемъ разстояній. Задаваясь тѣми или другими величинами t, мы найдемъ, рѣшивъ уравненіе, соотвѣтствующую величину s

2) Таблицею, которая будетъ содержать значенія разстояній точки (отъ начала разстояній) въ мгновенія указанныя въ таблицѣ напр

t мин	s метр
0 5	20
1	30
1 5	37,5
2	43,75
2 5	48,75

Для опредѣленія разстоянія въ мгновеніе, не указанное въ таблицѣ, придется прибѣгнуть къ интерполированію (§ 6). Таблицей, какъ извѣстно, опредѣляется движеніе пароходовъ, желѣзнодорожныхъ поѣздовъ и т. п., расписанія которыхъ и представляютъ при ѣры табличнаго опредѣленія зависимости между разстояніемъ и временемъ.

3) Графически (фиг. 28). При такомъ опредѣленіи зависимости между разстояніемъ и временемъ легко можетъ быть найдено разстояніе точки въ данное мгновеніе, напр. въ концѣ 2,5 минутъ; для этого слѣдуетъ возставить перпендикуляръ изъ конца 2,5 минутъ до пересѣченія съ кривой OA, называемой кривою разстояній, въ точкѣ B; изъ этой точки опустить перпендикуляръ на ось Os, который отсѣчетъ отъ нея длину, равную 50 м., что и представитъ разстояніе точки въ концѣ 2,5 мин.



28.

Относительныя достоинства и недостатки всѣхъ трехъ способовъ опредѣленія разсматриваемой зависимости ясны изъ указаннаго выше (§ 6) о заданіи зависимости между функціей и независимой перемѣнной.

Уравненіе и чертежъ позволяютъ рѣшить также обратный вопросъ: найти промежутокъ времени, въ теченіе котораго точка пройдетъ данное разстояніе. Въ такомъ случаѣ уже время разсматривается какъ функція разстоянія, являющагося перемѣнной независимой.

§ 32 Примѣръ опредѣленія движенія

Приведемъ примѣръ опредѣленія движенія, разсматривая напр поѣздъ, идущій по Николаевской желѣзной дорогѣ.

1 Траекторія—линія Николаевской желѣзной дороги.

2. Начало разстояній—Московскій вокзалъ Николаевской жел дороги.

3. Направленіе положительныхъ разстояній—отъ Москвы къ Петербургу

4. Единица разстояній—верста

Всѣ эти данныя относятся къ траекторіи.

Относительно времени должно быть дано:

5. Начало временъ мгновеніе выхода поѣзда изъ Москвы. 12 час. дня 26 октября 1905 г. Разумѣется начало временъ можетъ и не совпадать съ моментомъ выхода поѣзда, однако такое заданіе будетъ наиболѣе простымъ и естественнымъ

6. Единица времени — часъ *).

Наконецъ, слѣдуетъ дать зависимость между разстояніемъ, проходимымъ поѣздомъ, и временемъ, что, какъ указывалось, производится табличнымъ путемъ, а также графически посредствомъ такъ называемыхъ графиковъ желѣзнодорожнаго движенія.

Имѣя всѣ эти данныя, мы можемъ въ любое мгновеніе найти положеніе поѣзда, слѣдовательно, движеніе его будетъ вполнѣ опредѣлено или задано.

Чтобы не перечислять всѣхъ данныхъ, необходимыхъ при описанномъ способѣ опредѣленія движенія, такой способъ называютъ короче опредѣленіемъ движенія посредствомъ траекторіи и разстоянія.

Замѣтимъ, что начало разстояній и начало временъ могутъ и не совпадать, т. е. движущаяся точка въ началѣ временъ можетъ и не находиться въ началѣ разстояній. Протяженіе, на которомъ тѣло находится въ началѣ временъ отъ начала разстояній, носитъ названіе начальнаго разстоянія.

Пусть напр. мы разсматриваемъ движеніе поѣзда отъ Твери, вышедшаго изъ этого города въ 6 ч. веч.; это мгновеніе и будетъ началомъ временъ. Начало же разстояній, какъ то обыкновенно принимаютъ, находится въ одномъ изъ крайнихъ пунктовъ данной линіи, т. е. при движеніи поѣзда къ Петербургу въ Москвѣ, а не въ Твери; такимъ образомъ ясно, что начала разстояній и временъ могутъ не совпадать, а также ясно практическое значеніе начальнаго разстоянія.

Не слѣдуетъ смѣшивать зависимости разстоянія отъ времени съ траекторіей, что можетъ случиться при невнимательномъ разсмотрѣніи данныхъ, относящихся къ изслѣдуемому движенію; такому смѣшенію можетъ содѣйствовать также то, что и та, и другая данная можетъ быть задана какъ аналитически, такъ и графически.

Опредѣленіе положенія точки въ пространствѣ при данныхъ траекторіи и зависимости разстоянія отъ времени состоитъ на основаніи только что изложеннаго изъ двухъ дѣйствій: во-первыхъ, вычисленія по этой зависимости разстоянія точки соотвѣтственно данному мгновенію и, во-вторыхъ, откладыванія этого разстоянія по траекторіи. Ввиду того, что второе дѣйствіе является особенно простымъ, мы не останавливаясь на немъ, перейдемъ къ разсмотрѣнію нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ зависимости между разстояніемъ и временемъ.

---

*) О направленіи, въ которомъ отсчитываются положительныя времена, ничего не приходится говорить, такъ какъ здѣсь придерживаются обычнаго порядка вещей.

Для полнаго опредѣленія движенія необходима наличность всѣхъ перечисленныхъ выше элементовъ въ частномъ случаѣ, если бы не была указана траекторія, то мы были бы въ состояніи опредѣлить разстояніе точки отъ начала разстояній, а также проходимыя точкою разстоянія, но не знали бы, гдѣ находится движущаяся точка

Въ житейской практикѣ, равно какъ при рѣшеніи различныхъ вопросовъ въ механикѣ въ большинствѣ случаевъ не упоминаютъ подробно о всѣхъ элементахъ, опредѣляющихъ движеніе, такъ какъ относительно многихъ придерживаются установленныхъ жизнью нормъ

§ 33. Частные случаи зависимости между разстояніемъ и временемъ. Изслѣдуемъ въ видѣ примѣра одну изъ наиболѣе часто встрѣчающихся зависимостей, выраженную аналитически слѣдующимъ уравненіемъ:

$$s = a + bt + ct^2 \quad \ldots (17)$$

гдѣ a, b, c постоянные коефиціенты.

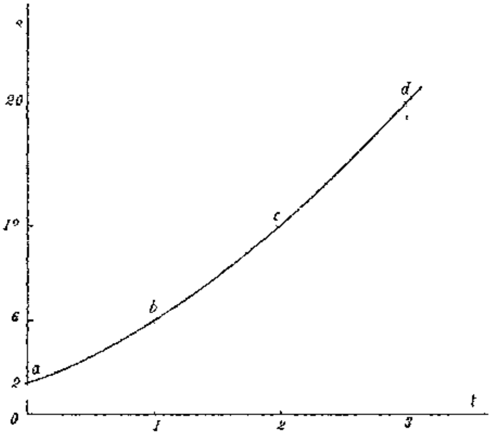
Написанное уравненіе легко можетъ быть представлено графически въ осяхъ временъ (ось абсциссъ) и разстояній (ось ординатъ).

Для большей опредѣленности при построеніи положимъ, что

$a = 2$, $b = 3$, $c = 1$,

тогда будемъ имѣть

$$s = 2 + 3t + t$$



29

Предполагая данными единицы которыми измѣряются времена и разстоянія, выберемъ масштабъ для того и другого, напр $^1/_2$ сек въ 1 см и 4 метра въ 1 см. (фиг. 29)

Задавшись для t значеніями, указанными въ нижеслѣдующей таблицѣ, найдемъ соотвѣтствующія имъ величины s

$$t = 0 \qquad s_0 = 2$$
$$t = 1 \qquad s_1 = 6$$
$$t = 2 \qquad s_2 = 12$$
$$t = 3 \qquad s_3 = 20$$

Значекъ внизу у s указываетъ промежутокъ времени, считая его отъ начала временъ, для котораго ищется разстояніе точки.

Согласно этому и въ общемъ выраженіи для разстоянія слѣдовало бы у s поставить значекъ t, такъ напр.

$$s_t = a + bt + ct^2,$$

но обыкновенно значекъ этотъ откидываютъ (17).

Построимъ точки $a\,(0{,}2)$, $b\,(1{,}6)$, $c\,(2{,}12)$, $d\,(3{,}20)$ (фиг. 29) и соединимъ ихъ (пользуясь напр. гибкой линейкой) кривой, которая и представитъ данную зависимость. Такой способъ построенія кривой носитъ названіе построенія по точкамъ. Чѣмъ больше точекъ вычислимъ, тѣмъ точнѣе будетъ построена кривая, выражающая разстояніе въ функціи отъ времени короче—кривая разстояній.

Разстояніе, пройденное точкой въ теченіе напр. n-ной секунды отъ начала движенія, найдемъ, вычтя изъ разстоянія s_n точки въ концѣ n секундъ, разстояніе s_{n-1} въ концѣ $(n-1)$ сек., т. е

$$\begin{aligned} s_n - s_{n-1} &= [a + bn + cn^2] - [a + b(n-1) + c(n-1)^2] = \\ &= [a + bn + cn^2] - [a + bn - b + cn^2 - 2cn + c] = \\ &= b + 2cn - c = b + c(2n-1). \end{aligned}$$

Въ частномъ случаѣ, если въ уравненіи (17) $c = 0$ т. е. $s = a + bt$ найдемъ $s_n - s_{n-1} = b$; то же получимъ и для $s_{n-1} - s_{n-2}$, $s_{n-2} - s_{n-3}\ldots$ вообще для любой секунды во время движенія.

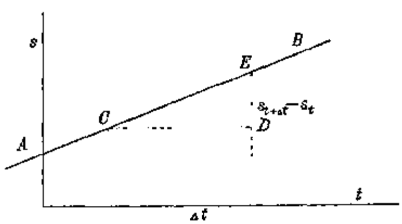
Это показываетъ, что точка во всякую секунду проходитъ одинаковыя разстоянія.

Примемъ напр

$$a = 2, \quad b = 1$$

тогда

$$s = 2 + t.$$



30

Построивъ это уравненіе по точкамъ въ осяхъ Ot и Os (фиг 30) получимъ прямую AB Не трудно убѣдиться, что всякое уравненіе первой степени относительно перемѣнныхъ s и t выражается графически прямой.

Имѣя въ общемъ случаѣ

$$s = a + bt$$

найдемъ то разстояніе, которое движущаяся точка пройдетъ въ нѣкоторый произвольный промежутокъ времени Δt Подъ этимъ обозначеніемъ разумѣютъ обыкновенно небольшой, иногда безконечномалый промежутокъ времени, причемъ такое обозначеніе промежутка времени двумя буквами яснѣе указываетъ тотъ родъ величины, часть которой составляетъ данный промежутокъ или элементъ, какъ говорятъ при малыхъ значеніяхъ его. При этомъ взятый промежутокъ Δt предполагаемъ слѣдующимъ за концомъ t-ой секунды. Разстояніе, пройденное въ теченіе его точкою выразится разностью разстояній $s_{t+\Delta t}$ и s_t или, такъ какъ

$$s_t = f(t)$$

$$s_{t+\Delta t} = f(t+\Delta t)$$

то разностью

$$f(t+\Delta t) - f(t)$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ, слѣдовательно, будемъ имѣть:

$$s_{t+\Delta t} - s_t = f(t+\Delta t) - f(t) = [a + b(t+\Delta t)] - [a + bt] = b\Delta t$$

Отношеніе его къ соотвѣтствующему промежутку времени Δt есть величина постоянная, равная коэффиціенту при t въ уравненіи разстояній; дѣйствительно

$$\frac{s_{t+\Delta t} - s_t}{\Delta t} = \frac{b\Delta t}{\Delta t} = b \qquad (18)$$

По графически числитель $(s_{t+\Delta t} - s_t)$, выражается отрѣзкомъ DE знаменатель — отрѣзкомъ CD; такимъ образомъ ординаты прямой $s = a + bt$ ростутъ пропорціонально абсциссамъ; подобное свойство принадлежитъ исключительно прямой линіи.

Отношеніе (18) показываетъ, съ какой быстротой разстоянія, проходимыя точкой, увеличиваются съ теченіемъ времени; указанное отношеніе даетъ такимъ образомъ возможность судить о быстротѣ или **скорости** движенія. Въ разсматриваемомъ случаѣ мы видимъ, что разстоянія ростутъ пропорціонально временамъ; такое движеніе называется **равномѣрнымъ**. Всякое другое движеніе получаетъ названіе неравномѣрнаго или перемѣннаго. По виду же траекторіи какъ то, такъ и другое движеніе можетъ быть прямолинейнымъ или криволинейнымъ. Вообще слѣдуетъ помнить, что зависимость между разстояніемъ и временемъ не даетъ никакого понятія о видѣ траекторіи и наоборотъ, вслѣдствіе чего и та, и другая данныя одинаково необходимы для опредѣленія движенія.

Если въ уравненіи

$$s = a + bt$$

$a = 0$, то линія разстояній проходитъ черезъ начало координатъ (фиг. 31).

Если $s = a$,

то тѣло находится въ покоѣ; дѣйствительно, для какого бы мгновенія мы ни опредѣляли разстояній точки, мы всегда получимъ величину a. Если $s = 0$ то тѣло пребываетъ въ покоѣ въ началѣ разстояній.

§ 34 Задачи.

1 а) Построить графически слѣдующія уравненія разстояній

$$1)\quad s = t + 1$$
$$2)\quad s = t - t^2$$
$$3)\quad s = 2 \quad 5t + 2t$$
$$4)\quad s = 3$$

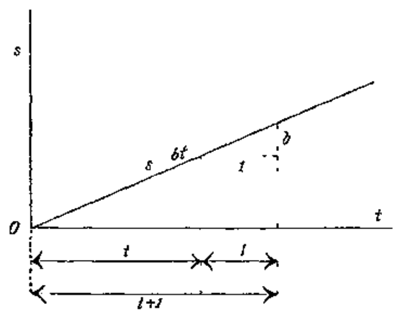
б) Найти разстояніе точки (отъ начала разстояній) въ концѣ двухъ секундъ; четырехъ секундъ.

в) Найти разстояніе, пройденное точкой въ теченіе второй секунды и четвертой секунды.

2. Дано уравненіе разстояній: $s = 2 - 3t$.

а) Показать, что разстоянія, проходимыя точкой впродолженіе каждой секунды остаются постоянными

б) Показать, что отношеніе пройденнаго точкою разстоянія къ любому промежутку времени есть величина постоянная, другими словами проходимыя разстоянія пропорціональны временамъ.



31

3. Прослѣдить движеніе точки по прямолинейной траекторіи, указывая положеніе ея послѣдовательно въ концѣ 0, 1, 2, 3 и т. д. секундъ при опредѣленіи движенія данными предыдущихъ задачъ

4. Найти положеніе точки въ концѣ одной, двухъ, четырехъ секундъ отъ начала временъ, если траекторія—кругъ радіуса 2 метр., начало разстояній совпадаетъ съ верхнимъ концомъ вертикальнаго діаметра; уравненіе разстояній: $s = 2 + t^2 - 3t$.

5. Дано уравненіе разстояній: $s = 4t$ Будетъ движеніе прямолинейнымъ или криволинейнымъ?

6. а) Зависимость $s = \sin t$ представить графически

б) Изслѣдовать движеніе точки по прямолинейной траекторіи

в) Чему равно начальное разстояніе?

7. Построить уравнения

$$s = \frac{2}{t} \quad \text{и} \quad s = \frac{1}{t}$$

8. Дано $s = \sin \pi$. Каково разстояніе точки въ концѣ двухъ секундъ?

9. Зависимость разстоянія отъ времени дана графически (фиг. 32)

а) Найти разстояніе, пройденное точкою въ двѣ и три секунды.

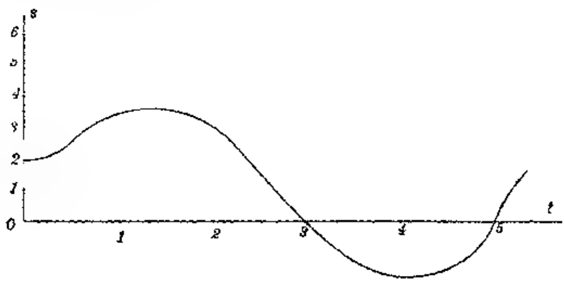
б) Указать положеніе точки на прямолинейной траекторіи въ концѣ двухъ и трехъ секундъ.

в) Чему равно начальное разстояніе?

10. Дано: $s = 4t + t^2$.

Во сколько секундъ, считая отъ начала времен, точка пройдетъ разстояніе въ 4 м.?

11. Дано $s = t^2 + 2t$. Въ какую секунду отъ начала временъ



32

точка пройдетъ разстояніе больше чѣмъ въ предыдущую секунду на 10 м.?

12. Уравненіе разстояній: $s = t^2 - 4t$. Найти приращеніе разстоянія, пройденнаго въ $(t + 1)$-ую сек. по сравненію съ разстояніемъ пройденнымъ въ t-ую сек.

Числ. данныя $t = 4$.

13. До начала временъ тѣло прошло 3 м, а затѣмъ двигалось равномѣрно, проходя въ секунду по 2 м.

а) Составить уравненіе разстояній для этого движенія.

б) Найти разстояніе, пройденное тѣломъ въ 3 секунды.

14. Траекторія точки кругъ. Будетъ движеніе равномѣрнымъ или перемѣннымъ?

15. Какъ измѣнится уравненіе разстояній: $s = 4 - 2t$, если начало разстояній перенесемъ на 3 единицы обратно направленію положительныхъ разстояній.

16 Два тѣла движутся одно на встрѣчу другому съ разстоянія 80 м. Черезъ сколько секундъ они встрѣтятся если уравненія разстояній ихъ таковы: $s' = 2 + 4t$ и $s'' = 2t^2$?

17. Предыдущая задача при данныхъ: $s' = 9t - 3t^2$ и $s'' = 3t^2 + t$ Рѣшить этотъ вопросъ графически

Рѣшенія задачъ.

1. а) Построеніе кривыхъ производится по точкамъ (§ 33)

б) Подставить вмѣсто t соотвѣтственно 2 и 4

в) Опредѣляется по формуламъ для $s_2 - s_1$, $s_4 - s$ (§ 33)

2. а) Разстояніе, пройденное въ $(t+1)$-ую секунду найдется изъ выраженія $(s_{t+1} - s_t)$ и есть величина постоянная

б) Отношеніе

$$\frac{s_{t+\Delta t} - s_t}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = -3$$

Отношеніе это выражаетъ скорость движенія (§ 33)

3 Подставляя 0, 1, 2, 3 .. въ уравненіе разстояній, находимъ разстоянія точки отъ начала которыя и откладываемъ по траекторіи.

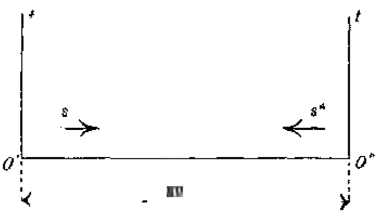
4. Для конца второй секунды имѣемъ $s_2 = 0$, т. е. точка находится въ началѣ разстояній Для конца четырехъ сек. $s_4 = 6$. Точка прошла при этомъ часть окружности, равную $\frac{s_4}{2\pi r} = \frac{6}{2\pi 10}$.

5 Уравненіе разстояній не опредѣляетъ вида траекторіи (см § 32)

6 а) См. § 33. Для t задаемся величинами 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, π .. Получимъ кривую, называемую синусоидой

б) Точка движется періодически взадъ и впередъ по траекторіи, удаляясь отъ начала на наибольшее разстояніе, равное единицѣ.

в) Начальное разстояніе равно нулю.



33

7. Получимъ кривыя, называемыя гиперболами; (~~въ послѣднемъ случаѣ гипербола будетъ равнобокой~~.)

8 Точка находится въ покоѣ въ началѣ разстояній ($\sin \pi = 0$)

9. а) См. зад. 1, в)

в) Начальное разстояніе равно 2

10 Опредѣляемъ t изъ уравненія $4 = 4t - t^2$

11 Опредѣляемъ $(t+1)$ изъ уравненія:

$$(s_{t+1} - s_t) = 10 = (t+1)^2 - 2(t+1) - (t^2 - 2t)$$

12. Рѣшается подобно задачѣ 11.

13. а) $s = 3 + 2t$, б) $s_1 = 6$.

14. Опредѣляется зависимостью разстоянія отъ времени, а не траекторіей (§ 32).

15. Получимъ $s = 7 - 2t$.

16. Находимъ t изъ уравненія: $2 + 4t + 2t^2 = 80$.

17. Строимъ кривыя (фиг. 33) соотвѣтственно въ осяхъ (s', t) и (s'', t). Ордината точки пересѣченія (t) даетъ искомое мгновеніе $(t = 8)$.

ГЛАВА II

Сложеніе и разложеніе движеній

§ 35. Понятіе объ абсолютномъ и относительномъ движеніи Движеніе относительное и переносное.

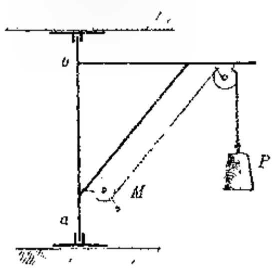
Разсматривая движеніе точки по данной траекторіи, мы опредѣляли на основаніи извѣстной зависимости разстоянія отъ времени положенія точки на траекторіи. Послѣднюю при этомъ мы предполагали неподвижно расположенной въ пространствѣ. Сдѣланныя разсужденія относительно мѣстъ, занимаемыхъ движущейся точкой на той же траекторіи, ни въ чемъ не будутъ нарушены, если мы предположимъ что траекторія точки въ свою очередь измѣняетъ свое положеніе въ пространствѣ Положеніе точки относительно траекторіи по прежнему будетъ опредѣляться данной зависимостью разстоянія отъ времени. Что же касается положенія точки относительно другихъ предметовъ въ пространствѣ, или вообще относительно неподвижныхъ точекъ пространства, въ которомъ траекторія движется тѣмъ или другимъ образомъ, то, очевидно, имѣющихся данныхъ, касающихся движенія точки по траекторіи недостаточно; необходимы дополнительныя данныя, которыя опредѣляли бы движеніе траекторіи относительно другихъ предметовъ, предполагаемыхъ неподвижными, и въ соединеніи съ имѣющимися данными относящимися къ движенію точки по траекторіи, позволили бы и въ случаѣ подвижной траекторіи опредѣлить положеніе точки въ пространствѣ Уже теперь можно видѣть, что къ перемѣщеніямъ точки по траекторіи должны быть прибавлены еще перемѣщенія, которыя она испытываетъ вслѣдствіе движенія траекторіи, точка имѣетъ какъ бы два движенія: собственное относительно траекторіи и другое вмѣстѣ съ послѣднею, благодаря передвиженію переносу траекторіи относительно предметовъ находящихся въ пространствѣ Первое изъ этихъ движеній называется относительнымъ, второе переноснымъ

Наша задача и будетъ состоять въ томъ, что бы указать какъ изъ этихъ двухъ движеній получить одно дѣйствительное, истинное движеніе точки указать необходимыя данныя для опредѣленія этого движенія, называемаго также составнымъ движеніемъ; первымъ же присваивается названіе движеній составляющихъ или слагаемыхъ. Самый пріемъ полученія составного движенія носитъ названіе сложенія движеній; обратная задача называется разложеніемъ движеній.

Но очевидно, каково бы ни было движеніе траекторіи, движеніе точки относительно траекторіи ни въ чемъ не будетъ нарушено первымъ и, слѣдовательно, если насъ интересуютъ только перемѣщенія точки по траекторіи, то рѣшеніе вопроса, разсмотрѣнное въ предыдущей главѣ, примѣняется безразлично какъ къ траекторіи неподвижной, такъ и къ движущейся; другими словами—движенія относительное и переносное другъ отъ друга не зависятъ.

§ 36. Примѣры.

Приведемъ примѣры движенія тѣла по движущимся траекторіямъ.



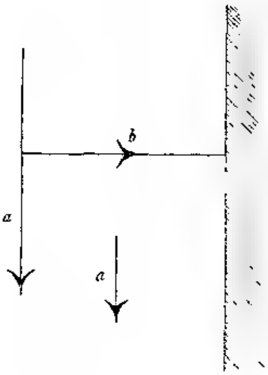
34.

1) На заводахъ примѣняется подъемный механизмъ, извѣстный подъ названіемъ мостового крана; по направленію длинныхъ сторонъ мастерскихъ укладываютъ рельсы, по которымъ можетъ перемѣщаться на каткахъ мостъ; по послѣднему, слѣдовательно, въ направленіи перпендикулярномъ къ направленію движенія моста, можетъ перемѣщаться лебедка для подниманія груза, поставленная на особой телѣжкѣ. При неподвижно стоящихъ мостѣ и телѣжкѣ грузъ можетъ передвигаться по вертикальной линіи (траекторіи), неподвижной относительно стѣнъ зданія. При перемѣщеніи въ то же время телѣжки по мосту траекторія эта придетъ въ движеніе. Результирующее, общее перемѣщеніе груза будетъ слагаться изъ двухъ движеній его по вертикали посредствомъ ворота и въ горизонтальномъ направленіи посредствомъ перемѣщенія телѣжки. Сюда можетъ быть присоединено еще третье, если мы приведемъ въ движеніе мостъ крана. Возможно перемѣстить грузъ изъ даннаго положенія въ какое-либо другое разнообразнымъ сочетаніемъ указанныхъ трехъ движеній, при чемъ и траекторіи, описываемыя грузомъ, будутъ имѣть различный видъ.

2) Въ случаѣ поворотнаго крана ось котораго вращается въ подшипникахъ a и b (фиг. 34), а грузъ P подвѣшенъ къ неподвижно укрѣпленному на концѣ стрѣлы блоку, грузъ можетъ получить два движенія: посредствомъ ворота по вертикали и при вращеніи крана около оси (ab) — по горизонтальному кругу. При одновременномъ дѣйствіи ворота и вращеніи крана движеніе груза будетъ составное изъ сказанныхъ двухъ, причемъ ясно что при помощи по-

воротнаго крана грузъ можетъ быть помѣщенъ въ любую точку цилиндрической поверхности съ радіусомъ, равнымъ выносу крана.

3) При переправѣ черезъ рѣку (фиг. 35) лодка получаетъ два движенія: одно по направленію теченія a подъ дѣйствіемъ его, другое въ направленіи b, напр. перпендикулярномъ къ первому, благодаря усиліямъ гребца. Дѣйствительное движеніе точки будетъ результатомъ обоихъ указанныхъ движеній.

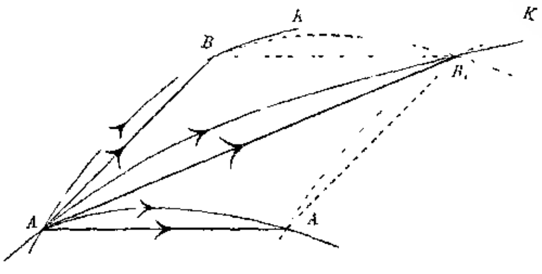


35

§ 37 Виды переносныхъ движеній: поступательное и вращательное.

Переносныя движенія одной траекторіи по другой могутъ быть по виду путей, описываемыхъ отдѣльными точками траекторіи, вообще говоря, весьма разнообразными. Но всѣ они приводятся къ двумъ простѣйшимъ, элементарнымъ видамъ движеній: поступательному и вращательному.

Подъ именемъ движенія поступательнаго, какъ указывалось выше (§ 4), разумѣется такое переносное движеніе, при которомъ всякая хорда движущейся траекторіи, неразрывно съ ней связанная,



36

остается все время паралельной самой себѣ. Пусть будетъ напр. AK траекторія движущейся точки (фиг. 36). Пусть траекторія эта перемѣщается по траекторіи AA_1 такимъ образомъ, что точка A, неразрывно связанная съ траекторіей AK, постоянно остается на второй траекторіи. Проведемъ хорду AB; тогда переносное движеніе траекторіи AK мы назовемъ поступательнымъ въ томъ случаѣ, если хорда эта при всѣхъ послѣдовательныхъ положеніяхъ траекторіи AK будетъ оставаться паралельной своему начальному положенію AB такъ напр. $A_1B_1 \parallel AB$. По аналогии съ паралельными прямыми говорятъ, что и траекторія во всѣхъ положеніяхъ, послѣдовательно занимаемыхъ ею, остается въ разсматриваемомъ случаѣ паралельной начальному своему положенію.

Какъ будетъ видно изъ правила сложенія движеній, всѣ точки траекторіи при поступаніи описываютъ взаимнопаралельные и равные между собою пути.

Если же точка A траекторіи AK останется неподвижной, сама же траекторія повернется около этой точки, то мы получимъ случай вращательнаго движенія. Всякое другое элементарное перемѣщеніе траекторіи можетъ быть всегда составлено изъ двухъ названныхъ перемѣщеній: поступательнаго и вращательнаго. Къ болѣе подробному разсмотрѣнію вращательнаго движенія мы обратимся въ кинематикѣ твердаго тѣла, пока же остановимся лишь на разсмотрѣніи поступательнаго движенія.

§ 38. Общій пріемъ сложенія поступательныхъ движеній. Паралелограмъ хордъ перемѣщеній.

Пусть будутъ даны два движенія: движеніе точки по траекторіи AK и поступательное движеніе траекторіи AK по траекторіи AA_1 (фиг. 36). Каждое изъ движеній должно быть, очевидно, вполнѣ опредѣлено, кромѣ траекторій мы должны имѣть соотвѣтствующія зависимости между разстояніями и временами и прочія необходимыя данныя, о которыхъ говорилось въ главѣ I.

Пусть движущаяся точка въ мгновеніе, опредѣляемое концомъ t-ой секунды или, короче, въ мгновеніе t, находится въ положеніи A. Найдемъ положеніе точки въ пространствѣ черезъ нѣкоторый промежутокъ времени Δt, слѣдующій за даннымъ мгновеніемъ. Пусть точка пройдетъ по траекторіи AK разстояніе AB *); въ то же самое время траекторія AK перемѣстится въ положеніе A_1K_1, причемъ точка A пройдетъ разстояніе AA_1. При этомъ хорда A_1B_1 будетъ паралельна (и равна) хордѣ AB. Такъ какъ оба движенія другъ отъ друга не зависятъ, то мы можемъ представить ихъ совершившимися въ два равные, но слѣдующіе одинъ за другимъ, промежутка времени Δt; пусть въ первый изъ нихъ двигалась точка по траекторіи AK и перешла изъ A въ B, траекторія же оставалась неподвижной, а во второй движущаяся точка оставалась въ положеніи B, а траекторія AK перемѣстилась въ положеніе A_1K_1. При этомъ разсматриваемая движущаяся точка перейдетъ очевидно по нѣкоторой кривой BB_1 изъ B въ B_1. Спрашивается какимъ построеніемъ можетъ быть найдено положеніе точки B?

*) Въ каждомъ частномъ случаѣ, имѣя зависимость между разстояніемъ и временемъ, мы опредѣлимъ длину участка AB подобно указанному выше въ § 33.

Легко видѣть, что если мы соединимъ точки A и A_1, а также B и B_1 *между собою прямыми*, то четыреугольникъ ABB_1A_1 будетъ паралелограмомъ, такъ какъ AB равна и паралельна A_1B_1, слѣдовательно и AA_1 равна и паралельна BB_1. Линія же AB_1 будетъ діагональю паралелограма, построеннаго на хордахъ перемѣщеній AB и AA_1 — точки *и траекторіи*. Въ дѣйствительности, когда оба движенія будутъ совершаться одновременно, движущаяся точка опишетъ, очевидно, не путь ABB_1, а нѣкоторую кривую AB_1, которая и представитъ собою, слѣдовательно, составное перемѣщеніе, а прямая AB_1 будетъ его хордой.

Такимъ образомъ, какъ выводъ изъ всего сказаннаго, мы получаемъ правило, извѣстное подъ названіемъ *паралелограма перемѣщеній* или, точнѣе, паралелограма хордъ перемѣщеній и состоящее въ томъ, что *хорда составного перемѣщенія есть діагональ паралелограма, построеннаго на хордахъ составляющихъ перемѣщеній, соотвѣтствующихъ одному и тому же промежутку времени*.

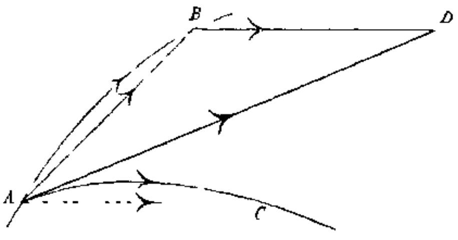
Если намъ дано каждое изъ составляющихъ движеній (траекторіей и зависимостью разстоянія отъ времени или какимъ либо инымъ способомъ, какъ то увидимъ впослѣдствіи), то на основаніи доказаннаго мы всегда съумѣемъ найти *положеніе* движущейся точки въ пространствѣ черезъ какой-либо промежутокъ времени, построивъ на хордахъ составляющихъ перемѣщеній паралелограмъ, діагональ котораго и будетъ хордой составного перемѣщенія. Конецъ ея B_1 будетъ принадлежать составной траекторіи движущейся точки. Построивъ для нѣсколькихъ мгновеній рядъ такихъ точекъ и соединивъ ихъ затѣмъ кривою линіей, мы и найдемъ траекторію составного или дѣйствительнаго движенія точки въ пространствѣ.

Слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что если точка перемѣщается по движущейся траекторіи или, короче говоря, имѣетъ два движенія, то безразлично, какую изъ траекторій мы будемъ считать траекторіей точки и какую траекторіей переносного движенія. Поэтому выраженіе: «точка имѣетъ два движенія» находитъ себѣ полное оправданіе. Пріемъ сложенія движеній, разсмотрѣнный нами для движеній поступательныхъ, примѣнимъ и для какихъ угодно движеній, но паралелограмъ движеній въ послѣднемъ случаѣ не можетъ быть примѣненъ.

Въ частномъ случаѣ, если оба составляющія движенія будутъ прямолинейными, то хорды ихъ будутъ совпадать съ самыми перемѣщеніями и вмѣсто сложенія хордъ можно складывать самыя перемѣщенія. Сложивъ послѣднія, мы, согласно найденному правилу, получимъ хорду составного перемѣщенія, но не самое перемѣщеніе, такъ какъ при прямолинейности составляющихъ перемѣщеній, составное можетъ быть криволинейнымъ, въ чемъ не трудно убѣдиться на чертежѣ.

Если прямолинейныя траекторіи двухъ составляющихъ движеній совпадаютъ между собою по положенію, то паралелограмъ обращается въ прямую и составное движеніе точки будетъ прямолинейнымъ. Величина дѣйствительнаго перемѣщенія опредѣлится суммой или разностью перемѣщеній въ составляющихъ движеніяхъ, смотря по тому, будутъ направленія послѣднихъ совпадать между собою или будутъ другъ другу противоположны, если составляющія перемѣщенія, будучи противоположны, будутъ сверхъ того и равны по величинѣ, то точка вернется въ прежнее положеніе.

Для опредѣленія положенія точки, имѣющей два движенія, въ концѣ какого либо промежутка времени построеніе паралелограма можетъ быть замѣнено построеніемъ треугольника; такъ, если перемѣщенія точки по двумъ траекторіямъ будутъ AB и AC (фиг. 37), то проведя хорды этихъ перемѣщеній, изъ точки B проведемъ линію BD, паралельную и равную хордѣ AC, соединивъ



37

точки A и D, получимъ хорду дѣйствительнаго перемѣщенія точки Направленія движенія точки по каждой изъ траекторій указаны стрѣлками, соотвѣтствующія направленія будутъ имѣть и хорды перемѣщеній; направленіе линіи AD будетъ отъ A къ D. Разсматривая полученный треугольникъ ABD, мы видимъ, что хорда составного перемѣщенія имѣетъ направленіе обратное хордамъ перемѣщеній составляющихъ, начавъ движеніе отъ A къ B и D, мы будемъ идти по направленію стрѣлокъ и пойдемъ противъ нихъ лишь по хордѣ DA. Такой сторонѣ въ треугольникѣ (или многоугольникѣ) присваиваютъ названіе замыкающей. Такимъ образомъ мы имѣемъ: хорда составного перемѣщенія выражается по величинѣ и направленію замыкающей стороной треугольника, въ которомъ двѣ другія стороны суть хорды перемѣщеній составляющихъ

§ 39 Многоугольникъ движеній

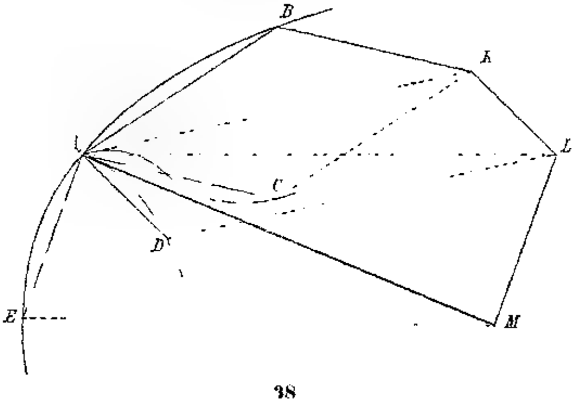
Если бы точка имѣла не два, а нѣсколько движеній, то складывая всѣ движенія послѣдовательно по два, пользуясь выведеннымъ правиломъ паралелограма мы найдемъ положеніе точки въ концѣ любого промежутка времени

Дѣйствительно, положимъ, что траекторіи составляющихъ движеній суть кривыя AB, AC, AD и AE (фиг. 38), причемъ перемѣщенія точки по каждой изъ нихъ въ одинъ и тотъ же данный промежутокъ времени пусть будутъ AB, AC, AD и AE. Сложимъ сначала перемѣщенія AB и AC, проведя хорды AB и AC и построивъ на нихъ паралелограмъ, AK будетъ хорда составного перемѣщенія. Сложивъ затѣмъ AK и AD, найдемъ хорду AL, наконецъ, сложеніемъ AL и AE найдемъ хорду AM дѣйствительнаго составного перемѣщенія точки, имѣющей четыре указанныхъ движенія.

Такъ какъ

$$BK \parallel \text{ и } = \text{хордѣ } AC$$
$$KL \parallel \text{ и } = \text{хордѣ } AD$$
$$LM \parallel \text{ и } = \text{хордѣ } AE,$$

и такъ какъ направленія всѣхъ сторонъ многоугольника, указанныя



38

стрѣлками, одинаковы за исключеніемъ стороны AM, представляющей собою хорду составного перемѣщенія, то послѣдняя будетъ замыкающей стороной въ многоугольникѣ. Мы приходимъ такимъ образомъ къ правилу, называемому многоугольникомъ перемѣщеній; разсмотрѣнный же выше паралелограмъ перемѣщеній есть частный случай его.

Все изложенное относительно сложенія движеній показываетъ, что если заданы два составляющихъ движенія точки, то мы имѣемъ всѣ данныя для опредѣленія положенія точки въ пространствѣ въ любое мгновеніе, такимъ образомъ мы имѣемъ второй способъ опредѣленія движенія точки посредствомъ заданія двухъ или нѣсколь кихъ соотвѣтствующихъ движеній ея. Какъ мы увидимъ ниже (§ 41), подобный пріемъ заданія движенія по сравненію съ заданіемъ движенія посредствомъ дѣйствительной траекторіи и закона разстояній для нея вноситъ иногда значительныя упрощенія въ рѣшеніе задачи.

§ 40. Примѣненіе правилъ сложенія векторовъ къ сложенію движеній. Изложенное выше опредѣленіе геометрической суммы (§§ 17—18) находитъ себѣ непосредственное примѣненіе при сложеніи движеній или, точнѣе, при сложеніи хордъ перемѣщеній, такъ какъ каждая изъ хордъ представляетъ собою векторъ, а потому выведенныя правила паралелограма и многоугольника движеній, показывающія, что хорда составного перемѣщенія есть діагональ паралелограма или, въ болѣе общемъ случаѣ, замыкающая сторона многоугольника, построеннаго на хордахъ составляющихъ перемѣщеній, могутъ быть прочитаны такъ: хорда составного перемѣщенія равна геометрической суммѣ хордъ составляющихъ перемѣщеній, соотвѣтствующихъ одному и тому же промежутку времени.

Доказавъ примѣнимость правилъ геометрическаго сложенія къ сложенію хордъ перемѣщеній, мы можемъ примѣнить къ послѣднимъ всѣ тѣ соотношенія, которыя были указаны выше въ главѣ о геометрическомъ сложеніи, замѣнивъ лишь слово: «векторъ» словомъ: «хорда перемѣщенія» *). Напомнимъ главнѣйшія изъ этихъ соотношеній въ примѣненіи къ сложенію перемѣщеній.

Если обозначимъ хорду составного перемѣщенія черезъ K, а хорды составляющихъ — $k_1, k_2, k_3 \ldots$, то получимъ:

$$K = k_1 + k_2 + k_3 + \ldots$$

Проекція хорды K составного перемѣщенія на какую-либо ось l равняется суммѣ проекцій хордъ составляющихъ перемѣщеній k_1, k_2, $k_3 \ldots$

$$K \cos (K, l) = k_1 \cos (k_1, l) + k_2 \cos (k_2, l) + k_3 \cos (k_3, l) + \ldots =$$
$$= \sum_1^n k_i \cos (k_i, l)$$

гдѣ n — число составляющихъ перемѣщеній.

*) Но для избѣжанія недоразумѣній слѣдуетъ опять напомнить, что ранѣе примѣненія правилъ или опредѣленій геометрическаго сложенія къ сложенію хордъ движеній необходимо доказать, что составная хорда будетъ діагональю паралелограма, т. е. геометрической суммой составляющихъ хордъ. Доказательство это для каждаго отдѣльнаго вида векторовъ, какъ напр. хордъ перемѣщеній, необходимо потому, что терминъ «геометрическая сумма» является не болѣе, какъ простымъ опредѣленіемъ, сокращающимъ и обобщающимъ выраженіе опредѣленной мысли въ примѣненіи къ различнымъ частнымъ случаямъ.

Въ частномъ случаѣ, если

$$\sum_{1}^{i} k_i \cos (k_i, l)$$

и если K не перпендикулярно къ l (иначе $\cos (k, l) = 0$), то

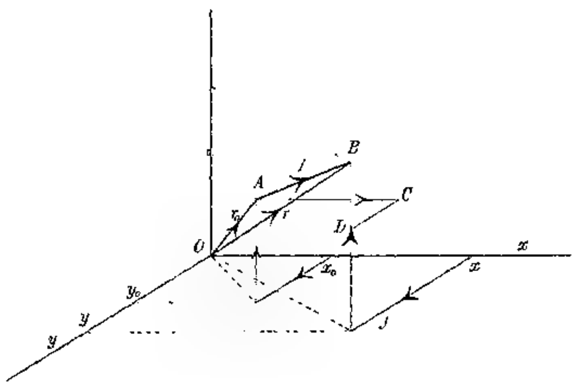
$$K = 0,$$

т. е. точка въ концѣ разсматриваемаго промежутка времени занимала то же самое положеніе, что и въ началѣ его.

Для разложенія движеній сохраняютъ силу всѣ правила, выведенныя для разложенія векторовъ; хорда каждаго перемѣщенія можетъ быть разложена геометрически на рядъ хордъ составляющихъ перемѣщеній, разложеніе будетъ опредѣленнымъ, если будутъ даны направленія или величины хордъ составляющихъ перемѣщеній. Изъ разнообразныхъ случаевъ, когда даются направленія составляющихъ перемѣщеній наиболѣе заслуживаетъ вниманія тотъ, когда направленія эти въ количествѣ трехъ образуютъ между собою прямые углы; случай этотъ разсмотримъ болѣе подробно.

§ 41. Сложеніе трехъ прямолинейныхъ движеній, направленія которыхъ взаимноперпендикулярны.

Въ этомъ случаѣ, какъ мы видѣли выше (§ 21) получается наи-



39

болѣе простая аналитическая зависимость между составнымъ и составляющими перемѣщеніями.

Пусть имѣемъ данными: 1) траекторіи составляющихъ движеній Ox, Oy и Oz (фиг. 39) пересѣкающіяся въ одной точкѣ O; 2) зависимости разстояній отъ времени для нихъ, выражающіяся въ общемъ

видѣ такъ:
$$s_x = f_1(t);\quad s_y = f_2(t);\quad s_z = f_3(t) \qquad 19)$$

Наиболѣе естественнымъ въ разсматриваемомъ случаѣ представляется взять начало разстояній для каждой изъ траекторій въ точкѣ пересѣченія ихъ между собою; а тогда разстоянія проходимыя точкой по каждой изъ траекторій будутъ совпадать по величинѣ съ соотвѣтствующими координатами точки, поэтому вмѣсто обозначеній s_x, s_y и s_z мы прямо можемъ поставить величины координатъ, причемъ получимъ:
$$x = f_1(t),\quad y = f_2(t),\quad z = f_3(t)$$
Положительныя разстоянія будемъ отсчитывать по направленіямъ идущимъ отъ начала координатъ.

Положеніе движущейся точки въ началѣ временъ опредѣлится соотвѣтственно величинами начальныхъ разстояній x_0, y_0 и z_0, которыя найдемъ, положивъ въ выраженіяхъ для x, y и z время t равнымъ нулю.

Въ теченіе даннаго промежутка времени t точка по каждой изъ траекторій пройдетъ разстояніе, величину котораго мы найдемъ изъ приведенныхъ трехъ уравненій. пусть перемѣщенія по каждой оси выразятся соотвѣтственно.
$$x - x_0 = AC$$
$$y - y_0 = CD$$
$$z - z_0 = DB.$$

Мы говоримъ «перемѣщенія», потому что при прямолинейныхъ движеніяхъ хорды перемѣщеній совпадаютъ съ самыми перемѣщеніями. Отсюда находимъ хорду $AB = k$ составного перемѣщенія
$$k^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$
$$k = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

а также косинусы угловъ образуемыхъ ею съ траекторіями
$$\cos(k, x) = \frac{x - x_0}{k}$$
$$\cos(k, y) = \frac{y - y_0}{k}$$
$$\cos(k, z) = \frac{z - z_0}{k}$$

Мы видѣли, что величины разстояній точки x, y, z представляютъ вмѣстѣ съ тѣмъ координаты движущейся точки относительно трехъ прямоугольныхъ осей координатъ. Таково двоякое значеніе величинъ x, y и z. На этомъ основаніи способъ опредѣленія движенія посред ствомъ трехъ прямолинейныхъ движеній называютъ способомъ опредѣленія или заданія помощью координатъ точки. Если будутъ даны три оси *) и координаты точки какъ функціи времени:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t)$$

то движеніе будетъ вполнѣ опредѣлено, такъ какъ для любого мгновенія мы можемъ указать положеніе точки въ пространствѣ.

Если движеніе совершается въ плоскости, то достаточно двухъ осей и двухъ координатъ точки.

Нечего говорить о томъ, что разложеніе движенія по тремъ осямъ координатъ есть разложеніе вполнѣ опредѣленное.

Достоинство только что разсмотрѣннаго способа опредѣленія движенія посредствомъ трехъ прямолинейныхъ движеній заключается въ его простотѣ; дѣйствительно, не смотря на то, что вмѣсто одной траекторіи и одного закона разстояній мы имѣемъ ихъ соотвѣтственно по три, за то всѣ траекторіи прямыя, хорды перемѣщеній равняются самымъ перемѣщеніямъ и аналитическая зависимость между составляющими перемѣщеніями и хордой составного (дѣйствительнаго) является весьма простой. Поэтому въ дальнѣйшемъ изложеніи этимъ пріемомъ мы будемъ постоянно пользоваться.

Наконецъ, выраженія (19) позволяютъ найти уравненіе траекторіи, въ самомъ дѣлѣ, въ нихъ входятъ четыре перемѣнныхъ величины: t, x, y, z. Исключая, напр. t изъ перваго и послѣдняго уравненія и выражая x въ зависимости отъ z, получаемъ:

$$x = \varphi(z). \qquad (20)$$

Точно также изъ (2) и (3) уравненій

$$y = \psi(z). \qquad (21)$$

Въ этихъ двухъ уравненіяхъ перемѣнныхъ величинъ три: задаваясь одной изъ нихъ, напр. z, по произволу, мы найдемъ соотвѣтствующія значенія для x и y, слѣдовательно опредѣлимъ всѣ три координаты движущейся точки, т. е. будемъ знать ея положеніе.

Слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что всѣ три координаты, опредѣляемыя уравненіями (20) и (21), будутъ соотвѣтствовать одному и тому же мгновенію, такъ какъ если одна изъ координатъ, напр. z, отвѣчаетъ нѣкоторому мгновенію t, которое мы можемъ считать найденнымъ изъ зависимости

$$z = f_3(t), \qquad (22)$$

то найдемъ ли мы прочие координаты изъ выраженій (20) и (21) или,

*) Представляющія въ кинематическомъ смыслѣ траекторіи трехъ составляющихъ движеній.

воспользовавшись уравненіемъ (22) и вычисливъ t, опредѣлимъ x и y посредствомъ уравненій (19), результатъ будетъ одинъ и тотъ же, т. е. всѣ уравненія будутъ удовлетворяться при одномъ и томъ же t.

Если на фиг. 38 соединимъ точки A и B, отвѣчающія положеніямъ точки въ началѣ и концѣ даннаго промежутка времени, съ началомъ координатъ прямыми, называемыми радіусами-векторами, то замѣтимъ, что хорда истиннаго перемѣщенія представляетъ собою геометрическую разность радіусовъ-векторовъ, т. е.:

$$k = r - r_0$$

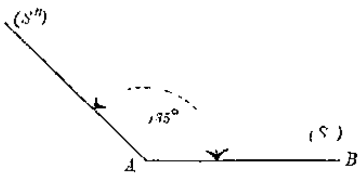
и, какъ называютъ обыкновенно, приращеніе радіуса-вектора, подразумѣвая подъ этимъ геометрическое приращеніе его, такъ какъ рѣчь идетъ о векторѣ, т. е. о величинѣ геометрической.

§ 42. Задачи.

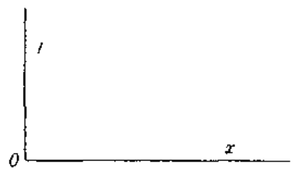
1. Точка имѣетъ два движенія по траекторіямъ AB и AC, образующимъ между собою уголъ въ 135° (фиг. 40). Зависимость разстояній отъ времени:

$$\text{для } AB = s' = 2t^2 + t$$
$$\text{»} \quad AC = s'' = t^2 - t$$

Начала разстояній для обѣихъ траекторій находятся въ точкѣ A. Построить по точкамъ траекторію составного движенія точки.



40



41

2. а) Найти траекторію составного движенія точки, если траекторіи составляющихъ движеній: Ox и Oy (фиг. 41), а уравненія разстояній:

$$y = 2t^2$$
$$x = t^2$$

б) Вычислить хорду дѣйствительнаго перемѣщенія точки въ теченіе 1-ой секунды и

в) въ теченіе 3-й секунды.

3. Составное движеніе совершается по прямой OR (фиг. 42), причемъ $s = 2t + 1$. Найти уравненія разстояній для составляющихъ движеній по траекторіямъ (осямъ) Ox и Oy.

4. Точка имѣетъ два движенія по траекторіямъ Ox и Oy (фиг. 41)

причемъ для Ox имѣемъ

$$x = 2 + t.$$

Можно ли подобрать какое-либо уравненіе разстояній для траекторіи Oy, чтобы точка, имѣя два эти движенія, оставалась въ покоѣ?

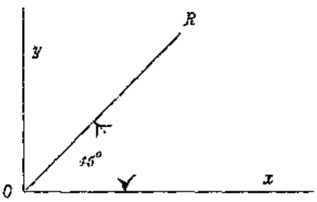
5. Какой видъ будетъ имѣть траекторія составного движенія, если при перпендикулярности составляющихъ перемѣщеній имѣемъ

$$1)\ \begin{cases} y = 2t^2 \\ x = t \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} y = t^2 \\ x = t - 2 \end{cases}$$

6. Движеніе задано помощью двухъ составляющихъ движеній по прямоугольнымъ траекторіямъ Ox и Oy, для которыхъ имѣемъ:

$$x = 1 - t^2, \quad y = 2t^2.$$

Произвести графически исключеніе t изъ этихъ выраженій. Что будетъ представлять полученная кривая?



42

Рѣшенія задачъ.

1. Построеніе производится по точкамъ, причемъ абсциса и ордината каждой отвѣчаетъ одному и тому же t.

2. а) Движеніе прямолинейное.

б) Искомая хорда $k = \sqrt{(y_t - y_{t-1})^2 + (x_t - x_{t-1})^2}$.

в) Вмѣсто t подставляемъ въ предыдущее выраженіе 3.

3. $y = x = s\cos 45^\circ = \dfrac{2t-1}{\sqrt{2}} = t\sqrt{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

4. Невозможно. См. § 21 (посл. строки).

5. Траекторіи находимъ или построеніемъ по точкамъ (см. задачу 1) или исключеніемъ t изъ данныхъ уравненій, причемъ получимъ:

$$1)\ y = 2(t)^2 = 2x^2 \qquad 2)\ \begin{cases} t = x + 2 \\ y = (x + 2)^2 \end{cases}$$

И то и другое суть уравненія параболы.

ГЛАВА III

Скорость

§ 43. О быстротѣ или скорости движенія Скорость равномѣрнаго движенія

Зависимость между разстояніемъ и временемъ позволяетъ опредѣлить величину разстоянія, пройденнаго точкой въ извѣстный промежутокъ времени; она доставляетъ нѣкоторую возможность кромѣ того судить о томъ, съ какой быстротой происходило движеніе, для чего слѣдуетъ только взять отношеніе разстоянія, пройденнаго въ извѣстный промежутокъ времени, къ этому промежутку, такъ напр., если движущаяся точка прошла въ одномъ случаѣ въ 2 сек. 10 метр., а въ другомъ въ то же время 20 метр., то мы скажемъ, что въ послѣднемъ случаѣ она двигалась въ общемъ вдвое быстрѣе, нежели въ первомъ. Если движеніе точки совершается согласно уравненію

$$s = 2t^2 - t$$

то въ первую секунду точка пройдетъ 1 м., во вторую — 5 м.; мы можемъ сказать, что въ среднемъ точка во вторую секунду двигалась въ пять разъ быстрѣе, нежели въ первую.

Но мы все таки еще не знаемъ ничего о томъ какъ происходило движеніе въ теченіе каждой изъ этихъ двухъ секундъ; точка могла двигаться равномѣрно, ускорять свое движеніе, замедлять и т. д., другими словами, быстрота движенія точки или, какъ говорятъ, **скорость** движенія точки могла оставаться постоянной или измѣнялась тѣмъ или другимъ образомъ. Мы теперь и разсмотримъ, какимъ образомъ имѣя зависимость между разстояніемъ и временемъ, можно судить о быстротѣ движенія точки или о величинѣ ея скорости въ любое мгновеніе въ теченіе ея движенія; при этомъ начнемъ разсмотрѣніе съ простѣйшей зависимости между разстояніемъ и временемъ Такова зависимость, когда t входитъ въ выраженіе для $s = f(t)$ въ первой степени.

Слѣдовательно, въ общемъ случаѣ будемъ имѣть

$$s = a + bt.$$

Какъ было найдено выше (уравненіе (18) § 33) при этомъ разстоя нія, проходимыя точкой, пропорціональны временамъ, т. е.

$$\frac{(s_{t+\Delta t} - s_t)}{\Delta t} = b$$

Въ числителѣ здѣсь стоитъ разстояніе, пройденное точкою въ промежутокъ времени Δt. Это разстояніе можемъ обозначить подобно обозначенію промежутка времени, т. е. положить

$$s_{t+\Delta t} - s_t = \Delta s$$

и тогда будемъ имѣть

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = b$$

Если бы имѣли зависимость

$$s = 2 + 3t$$

то для скорости получили бы величину

$$\frac{[2 + 3(t + \Delta t)] - [2 + 3t]}{\Delta t} = \frac{3\Delta t}{\Delta t} = 3.$$

Найденныя величины b и 3, показывающія съ какой быстротой измѣняются разстоянія, проходимыя точкой по траекторіи, въ зависимости отъ времени, и могутъ служить въ каждомъ случаѣ мѣрой скорости равномѣрнаго движенія. Такъ напр., во взятомъ численномъ примѣрѣ разстоянія, проходимыя точкой, ростутъ втрое быстрѣе, нежели время; слѣдовательно, въ каждую единицу времени точка проходитъ три единицы длины; это количество — разстояніе, проходимое точкой въ единицу времени—и можетъ служить мѣрой скорости равномѣрнаго движенія. Для обозначенія скорости обыкновенно принимаютъ букву v *)

Изъ приведенныхъ примѣровъ слѣдуетъ, что скорость равномѣрнаго движенія по величинѣ выражается коефиціентомъ при t.

§ 44. Единица для измѣренія скорости. Символическое обозначеніе ея.

Мы видимъ, что для полученія величины скорости приходится дѣлить разстояніе, пройденное въ данный промежутокъ времени, на этотъ послѣдній; но разстояніе выражается единицами длины, а время — единицами времени; приходится такимъ образомъ нѣкоторое число единицъ длины дѣлить на извѣстное число единицъ времени, числа могутъ быть, если потребуется, сокращены, наименованія же единицъ остаются безъ перемѣны. Вслѣдствіе этого скорость будетъ выражаться сложными единицами, зависящими отъ единицъ разстоянія и времени; если первое измѣряется метрами, а второе — секундами, то скорость будетъ выражаться метрами, дѣленными на се

*) Скорость по латыни velocitas.

кунды или, короче, метрами въ секунду. Если же говорятъ, что скорость такого то движенія равна напр. 2 метр., то дѣлается это для сокращенія рѣчи и при этомъ всегда подразумѣвается «въ такую то единицу времени»

Единицей же скорости при измѣреніи разстояній метрами, а времени — секундами, будетъ метръ въ секунду, т. е. единица скорости есть скорость такого равномѣрнаго движенія, въ которомъ точка проходитъ въ одну секунду одинъ метръ.

Въ абсолютной системѣ мѣръ, о которой подробнѣе скажемъ ниже (§ 136), за единицу длины берется сантиметръ, за единицу времени — секунда; слѣд., единица скорости будетъ сантиметръ въ секунду.

Для обозначенія тѣхъ единицъ, которыми измѣряются тѣ или другія именованныя количества и для указанія того, какъ сложныя или производныя единицы зависятъ отъ единицъ основныхъ, поступаютъ такимъ образомъ: принимаютъ для обозначенія основныхъ единицъ опредѣленныя знаки или буквы, такъ для обозначенія единицы длины берутъ знакъ L, а для единицы времени знакъ T Тогда для единицы скорости, измѣряемой единицею длины дѣленной на единицу времени, получимъ обозначеніе или символъ:

$$\frac{L}{T} \quad LT^{-1} \qquad (93)$$

Относительно важности усвоенія единицъ, которыми измѣряются скорость и другія механическія величины, замѣтимъ, что производить измѣреніе скорости единицами длины будетъ напр подобно измѣренію разстояній единицами вѣса.

§ 45. Положительная и отрицательная величина скорости

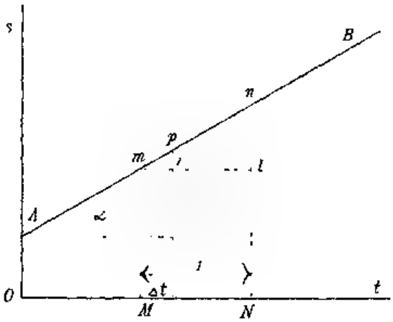
Скорость будетъ положительной или отрицательной въ зависимости отъ того, будетъ ли направленіе движенія точки совпадать съ направленіемъ положительныхъ разстояній или будетъ имъ обратно. Въ первомъ случаѣ разстояніе Δs, пройденное въ нѣкоторый промежутокъ времени Δt, будетъ больше нуля, а такъ какъ Δt всегда больше нуля, то и $\frac{\Delta s}{\Delta t} > 0$; слѣдовательно, скорость будетъ величиной положительной. Если же Δs будетъ меньше нуля, то скорость получитъ отрицательное значеніе. И обратно, по знаку скорости мы можемъ судить о томъ, въ какую сторону измѣняются разстоянія, проходимыя точкой. Если намъ дано напр., что $v < 0$, то и $s_{t+\Delta t} - s_t < 0$ т. е точка движется обратно направленію положительныхъ разстояній. При этомъ она будетъ приближаться къ началу разстояній, если была удалена въ сторону положительныхъ разстояній отъ начала разстояній и удаляться отъ него, если находилась по другую сторону начала

§ 46. Опредѣленіе скорости равномѣрнаго движенія графически.

Если зависимость разстоянія отъ времени задана графически (фиг. 43), то мы найдемъ величину скорости такъ: въ точкахъ M и N, разстояніе между которыми равно единицѣ времени, возставимъ перпендикуляры до пересѣченія съ линіей разстояній AB; тогда разность

$$Nn - Mm = ln$$

измѣренная въ единицахъ разстояній, дастъ численное значеніе скорости; дѣйствительно



43

$$Nn - Mm = ln = s_{t+1} - s_t$$

$$v = \frac{(s_{t+1}-s_t)\text{ единица разст.}}{1\text{ един. времени}} = tg\,\alpha \qquad (24)$$

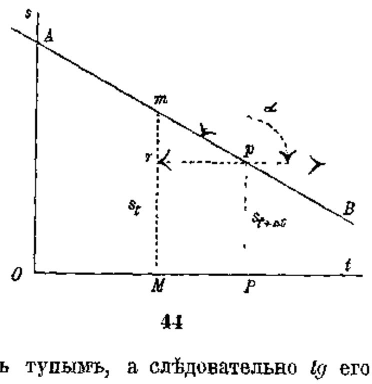
Можемъ отложить вмѣсто единицы отъ M величину Δt тогда очевидно

$$v = \frac{rp}{mr} = \frac{s_{t+\Delta t} - s_t}{\Delta t} = \frac{ln}{1} = tg\,\alpha$$

Если же линія разстояній AB будетъ имѣть положеніе, представленное на фиг. 44 то скорость будетъ отрицательной такъ какъ числитель выраженія

$$\frac{s_{t+\Delta t} - s_t}{\Delta t}$$

будетъ меньше нуля. Въ этомъ случаѣ точка движется обратно направленію положительныхъ разстояній, приближаясь въ разсматриваемомъ случаѣ къ началу разстояній. Уголъ α будетъ тупымъ, а слѣдовательно tg его отрицательнымъ *). При опредѣленіи скорости графически слѣдуетъ



44

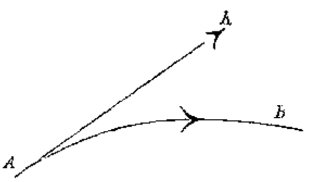
*) Если бы линія AB, сохраняя то же направленіе, лежала ниже оси абсциссъ, то точка также имѣла бы отрицательную скорость, двигаясь обратно направленію положительныхъ разстояній, но при этомъ она удалялась бы отъ начала разстояній.

обратить особенное вниманіе на то, что величина скорости выражается не тригонометрическимъ, а численнымъ тангенсомъ угла α. Дѣйствительно, въ формулѣ (24) числитель измѣряется единицами длины, знаменатель единицами времени; но масштабы для тѣхъ и другихъ, очевидно, не зависятъ другъ отъ друга.

§ 47. О направленіи скорости

Скорость разсматривается какъ геометрическая величина, а потому слѣдуетъ опредѣлить кромѣ численнаго ея значенія еще ея направленіе.

Зависимость разстоянія отъ времени можетъ дать намъ, очевидно, только величину скорости, но она не можетъ доставить никакихъ данныхъ для сужденія о направленіи. Здѣсь нужно обратиться, очевидно, къ траекторіи. Если послѣдняя прямолинейна, то направленіе скорости и будетъ съ нею совпадать. Въ случаѣ же криволинейной траекторіи направленіе скорости будетъ совпадать съ направленіемъ касательной къ траекторіи въ точкѣ ея, соотвѣтствующей данному мгновенію при этомъ касательная должна быть направлена въ сторону движенія (фиг. 45).



45

Такимъ образомъ для полнаго опредѣленія скорости, какъ геометрической величины, равно необходимы зависимость разстоянія отъ времени и траекторія. Первая даетъ величину скорости и знакъ ея, вторая же — положеніе вектора, опредѣляющаго скорость, въ пространствѣ.

Приводимъ таблицу приблизительныхъ значеній среднихъ скоростей въ м./сек.

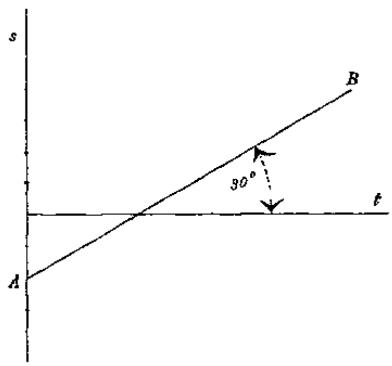
Пѣшеходъ .	1,5
Лошадь шагомъ	1
» рысью	2—2,2
» галопомъ	4—6
Скаковая лошадь	15—18
Поѣздъ товарный	6—8
» пасажирскій	8—12
» курьерскій	16—20
Пароходъ . .	5
Рѣка . . .	1
Горный потокъ	6
Вѣтеръ обыкновенный	3—3,3

Вѣтеръ сильный	15
Буря . .	15—30
Ураганъ	40—60
Ружейная пуля	480
Звукъ . . .	340
Земля при движенiи вокругъ солнца	30.750
Свѣтъ . .	300.000.000
Круглая пила на окружности	12
Поршень паровой машины	2—3

§ 48. **Задачи.**

1. Зависимость разстоянiй отъ времени дана чертежемъ (фиг. 46). Представить его аналитически, если $s_0 = -2$. Найти скорость движенiя.

2. На какомъ разстоянiи находится грозовая туча, если между молнiей и громомъ прошло 8 сек.? Скорость звука равна въ сек. 330 м.



46

3. Въ какое время достигаетъ солнечный лучъ земли, если разстоянiе между солнцемъ и землей равно 20.000.000 миль, а скорость свѣта 40.000 миль въ сек.?

4. Два тѣла, находящiяся на разстоянiи 2.000 метровъ, движутся на встрѣчу другъ другу; одно со скоростью 5, другое со скоростью 3 метровъ.

а) Сколько пройдетъ времени, считая отъ начала движенiя, до момента встрѣчи?

б) Какое разстоянiе до точки встрѣчи пройдетъ первое тѣло?

5. Скорость v задана уравненiемъ: $v = a + bt$, гдѣ a и b постоянныя. Будутъ ли онѣ числами отвлеченными и если нѣтъ, то въ какихъ единицахъ выражаются въ зависимости отъ основныхъ единицъ длины и времени?

6. Достаточно ли имѣть уравненiе разстоянiй какого либо движенiя, чтобы вполнѣ опредѣлить скорость?

7. Пѣшеходъ проходитъ въ часъ a вер. Черезъ t часовъ послѣ его отправленiя со станцiи, лежащей на p верстъ позади начала движенiя пѣшехода, вышелъ поѣздъ, дѣлающiй въ часъ въ среднемъ c вер.; чрезъ сколько времени поѣздъ догонитъ пѣшехода? Изслѣдовать полученное рѣшенiе. Числ. данн.: $a = 5$, $t = 4$, $p = 40$, $c = 25$.

Рѣшенія задачъ

1. $s = t\, tg\, 30^\circ - 2 = 0{,}577\, t - 2$ $v = 0{,}577$

2. 2640 м.

3. 8 мин. 20 сек.

4. а) 4 мин. 10 сек., б) 1.250 м

5. Уравненіе $v = a + bt$ должно быть однороднымъ, а потому a измѣряется единицами скоростей LT^{-1} а b — LT^{-2} (ускореніе, § 69)

6. Имѣя уравненіе разстояній, можно найти только величину скорости; направленіе же ея опредѣляется касательной къ траекторіи (§ 47).

7. $\dfrac{p + at}{c - a}$.

§ 49. Перемѣнное движеніе. Средняя скорость.

Если мы, имѣя какое-либо уравненіе разстояній $s = f(t)$ вообще говоря, выше первой степени, напр.

$$s = 2t^2 - t$$

вычислимъ разстояніе, пройденное движущейся точкой во вторую секунду, равное въ данномъ случаѣ 5, и раздѣлимъ его на этотъ промежутокъ времени, то получимъ 5 метр. въ секунду или, обозначая символически 5 м./сек. По измѣренію этой величины видно, что это будетъ нѣкоторая скорость. Спрашивается, какому движенію принадлежитъ эта скорость? Такъ какъ мы поступали въ разсматриваемомъ случаѣ, руководствуясь правилами, выведенными выше для равномѣрнаго движенія, то мы можемъ сказать, что это есть скорость равномѣрнаго движенія, имѣющаго съ нашимъ перемѣннымъ движеніемъ то общее свойство, что разстоянія, проходимыя въ нихъ въ одинъ и тотъ же промежутокъ времени, равны между собою. Такую скорость называютъ средней скоростью; въ данномъ случаѣ средняя скорость разсматриваемаго нами перемѣннаго движенія во вторую секунду равна 5 м./сек

Итакъ, средней скоростью какого-либо перемѣннаго движенія называется отношеніе разстоянія, пройденнаго точкою въ данный промежутокъ времени, къ послѣднему.

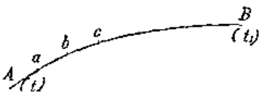
Въ общежитіи часто приходится имѣть дѣло со средней скоростью; такъ напр., говоря о скорости движенія поѣзда или парохода между двумя остановками, причемъ скорость эта находится какъ частное отъ дѣленія разстоянія на соотвѣтствующій ему промежутокъ времени имѣютъ въ виду именно среднюю скорость движенія тѣла.

§ 50 Скорость въ данное мгновеніе.

Имѣя даннымъ уравненіе разстоянія перемѣннаго движенія $s = f(t)$, опредѣлимъ разстояніе, пройденное точкой въ теченіе нѣкотораго промежутка времени $(t_1 - t)$ слѣдующаго за концомъ t секундъ

Пусть это разстояніе выразится участкомъ AB траекторіи точки (фиг. 47).

Раздѣлимъ промежутокъ времени $(t_1 - t)$ на n равныхъ частей, при чемъ $\frac{t_1 - t}{n} = \Delta t$. Разстоянія Ab, ab, bc ..., проходимыя движущейся точкой въ каждый изъ такихъ промежутковъ времени, будутъ, вообще говоря, неравны между собою. Представимъ теперь другую точку, движущуюся по той же траекторіи такъ, что она находится въ положеніяхъ A, a, b, c .. B одновременно съ разсматриваемой нами точкой, а разстоянія между этими точками проходитъ равномѣрно. Такъ какъ участки Aa, ab, bc .. между собою не равны, то и скорости равномѣрныхъ движеній второй точки, выражающіяся отношеніями $\frac{Aa}{\Delta t}$, $\frac{ab}{\Delta t}$, $\frac{bc}{\Delta t}$ ..., будутъ также различаться одна отъ другой. Отношенія эти будутъ выражать въ то же самое время и среднія скорости движущейся точки на протяженіи каждаго изъ элементовъ траекторіи.



47

Обѣ движущіяся точки, совпадая между собою по положенію при прохожденіи границъ элементовъ, въ промежуточныя мгновенія будутъ занимать различныя мѣста на траекторіи. Но мы можемъ число пунктовъ совпаденія точекъ увеличить по желанію; для этого стоитъ лишь увеличить число элементовъ Δt; иначе говоря, воображаемое равномѣрное движеніе можетъ выразить характеръ перемѣннаго движенія — какъ въ отношеніи положеній движущейся точки на траекторіи, такъ и въ отношеніи скоростей ея движенія — съ желаемой степенью точности. Но однако какимъ бы большимъ мы ни брали число n, всегда каждый элементъ Δt будетъ имѣть нѣкоторую величину, и на протяженіи соотвѣтствующаго участка траекторіи обѣ движущіяся точки могутъ не совпадать. Полнаго совпаденія между обоими движеніями мы достигнемъ тогда, когда отъ безконечно малыхъ промежутковъ времени, перейдемъ къ предѣлу ихъ, т. е. положимъ всѣ элементы Δt равными нулю. Въ такомъ случаѣ общность между движеніями распространится и на скорости: скорости равномѣрныхъ движеній будутъ выражать по своей величинѣ и скорости перемѣннаго движенія въ любое мгновеніе; каждую изъ послѣднихъ можно при этомъ опредѣлить какъ скорость равномѣрнаго движенія, которую точка имѣла бы, если бы скорость точки въ перемѣнномъ движеніи, начиная съ этого мгновенія перестала измѣняться.

По мѣрѣ уменьшенія промежутка Δt вычисляемую для него среднюю скорость (перемѣнную величину) мы можемъ приблизить къ скорости въ данное мгновеніе (постоянной величинѣ, независимой отъ величинъ промежутковъ времени, для которыхъ вычисляются среднія скорости) такъ близко, какъ того пожелаемъ, т. е. разницу между ними можемъ сдѣлать произвольно малой или безконечномалой. А потому скорость въ данное мгновеніе опредѣлится какъ предѣлъ средней скорости въ промежутокъ времени, начало котораго совпадаетъ съ даннымъ мгновеніемъ.

Основываясь на изложенномъ, для нахожденія скорости перемѣнного движенія въ какое-либо мгновеніе, опредѣляемое концомъ t-ой секунды, слѣдуетъ поступить такъ. взять элементъ времени Δt, слѣдующій за нимъ, вычислить среднюю скорость движенія точки въ продолженіи его, т. е.

$$v_{cp} = \frac{s_{t+\Delta t} - s_t}{\Delta t}$$

и затѣмъ взять предѣлъ этой скорости, положивъ Δt равнымъ нулю. Мы и получимъ въ результатѣ искомую скорость въ данное мгновеніе а именно

$$v = \text{пр}\ (v_{cp})_{\Delta t = 0} = \text{пр}\ \left[\frac{s_{t+\Delta t} - s_t}{\Delta t}\right]_{\Delta t = 0}.$$

Къ тому же выводу придемъ и путемъ такого разсужденія: поставивъ себѣ задачей найти скорость въ концѣ времени t, подъ которой будемъ разумѣть скорость равномѣрнаго движенія, которую точка имѣла бы, если бы, начиная со взятаго мгновенія, скорость точки перестала измѣняться. Найдемъ среднюю скорость въ промежутокъ времени Δt, слѣдующій за мгновеніемъ t. Про дѣйствительное движеніе мы можемъ сказать, что скорость его, измѣняясь, въ какое то мгновеніе въ теченіе второй секунды была равна найденной величинѣ средней скорости, такъ какъ движеніе точки неравномѣрное, и если скорость была напр., больше найденной величины, то она должна была быть въ этотъ же промежутокъ времени и меньше ея, только при этомъ условіи возможно равенство разстояній въ разсматриваемомъ перемѣнномъ и равномѣрномъ движеніяхъ. Переходя же изъ одного значенія въ другое, скорость необходимо должна была пройти черезъ найденную величину.

Будемъ теперь постепенно уменьшать промежутки времени, для которыхъ мы вычисляемъ среднюю скорость, отсчитывая ихъ всѣ отъ конца первой секунды. Если мы подобнымъ же образомъ вычислимъ среднюю скорость въ теченіе первой половины второй секунды, то опять можемъ сказать, что эту скорость точка имѣла въ нѣкоторое мгновеніе, заключающееся между концомъ первой и серединой второй секунды. Вообще, найдя

$$v_{cp} = \frac{s_{t+\Delta t} - s_t}{\Delta t}$$

мы можемъ утверждать, что движущаяся точка имѣетъ дѣйствительно эту скорость по крайней мѣрѣ въ одно мгновеніе во время промежутка времени Δt, слѣдующаго за концомъ t-ой секунды отъ начала времени. Насколько это мгновеніе по времени можетъ отстоять отъ даннаго мгновенія, зависитъ отъ величины промежутка времени Δt. Чѣмъ меньше будетъ послѣдній, тѣмъ ближе къ данному мгновенію будетъ то мгновеніе въ которое движущаяся точка будетъ обладать вычисленной скоростью. Послѣдняя будетъ точно выражать искомую скорость въ данное мгновеніе, если мы величину взятаго промежутка времени Δt положимъ равной нулю, т. е. возьмемъ предѣльное значеніе его.

Во всемъ только что изложенномъ относительно скорости въ данное мгновеніе мы имѣли въ виду промежутокъ времени, имѣющій въ мгновеніи, для котораго мы ищемъ величину скорости, свое начало. Ничто не мѣшаетъ намъ взять промежутокъ времени, имѣющій въ данномъ мгновеніи свой конецъ, и уменьшая этотъ промежутокъ при опредѣленіи скорости, оставлять конецъ его всегда въ данномъ мгновеніи. Тогда въ предѣлѣ мы придемъ къ тому же мгновенію и какъ это необходимо слѣдуетъ изъ всего сказаннаго должны получить для скорости то же значеніе.

Итакъ, скоростью точки въ данное мгновеніе называется предѣлъ средней скорости ея вычисленный для промежутка времени, имѣющаго въ данномъ мгновеніи свое начало (или свой конецъ).

Слѣдовательно

$$v_t = \text{пр}\left(\frac{s_{t+\Delta t} - s_t}{\Delta t}\right)_{\Delta t=0} = \text{пр}\left(\frac{s_t - s_{t-\Delta t}}{\Delta t}\right)_{\Delta t=0} \qquad (25)$$

Здѣсь знакъ t при буквѣ v показываетъ то мгновеніе, для котораго скорость вычисляется (конецъ t-ой секунды) Обыкновенно пользуются первымъ изъ этихъ выраженій.

Возвращаясь къ частному примѣру: $s = 2t^2 - t$, покажемъ на немъ примѣненіе послѣдняго выраженія для опредѣленія скорости въ данное мгновеніе. Найдемъ скорость въ концѣ t-ой секунды или, что то же, началѣ $(t+1)$-ой. Возьмемъ сначала нѣкоторый промежутокъ Δt слѣдующій за концомъ t-ой секунды и вычислимъ для него среднюю скорость движенія т е

$$v_{ср} = \frac{s_{t+\Delta t} - s_t}{\Delta t}$$

Будемъ имѣть послѣдовательно

$$s_{t+\Delta t} = 2(t+\Delta t)^2 - (t+\Delta t)$$

$$s_t = 2t^2 - t$$

$$\begin{aligned} s_{t+\Delta t} - s_t &= 2(t+\Delta t)^2 - (t+\Delta t) - (2t^2 - t) = \\ &= 2(t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2) - t - \Delta t - 2t^2 + t = \\ &= 4t\Delta t - \Delta t + 2(\Delta t)^2 = (4t - 1)\Delta t + 2(\Delta t)^2 \end{aligned}$$

$$v_{ср} = \frac{(4t-1)\Delta t + 2(\Delta t)^2}{\Delta t} = 4t - 1 + 2\Delta t$$

Чтобы найти v_t, нужно перейти къ предѣлу а именно

$$v_t = \text{пр}\,(v_{ср}) = \text{пр}\,(4t - 1 + 2\Delta t) = \text{пр}\,(4t) - \text{пр}\,(1) + \text{пр}\,(2\Delta t)$$

Беря предѣлъ перваго члена — $4t$, слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что время t, являющееся въ общемъ случаѣ — при разсмотрѣніи движенія точки — величиной перемѣнной (независимой), здѣсь должно быть разсматриваемо какъ величина постоянная, такъ какъ при нахожденіи предѣла средней скорости или, что то же, скорости въ опредѣленное мгновеніе, перемѣннымъ будетъ элементъ времени Δt, который мы и уменьшаемъ по нашему произволу и наконецъ въ предѣлѣ полагаемъ равнымъ нулю.

Ввиду этого будемъ имѣть:

$$\text{пр. } (4t) = 4t$$
$$\text{пр. } (1) = 1$$
$$\text{пр. } (2\Delta t) = 0$$

Окончательно

$$v = 4t - 1$$

Значокъ у v, впредь будемъ откидывать помня что v есть скорость въ концѣ промежутка t, а потому

$$v = 4t - 1$$

Видимъ, что v и v_{cp} отличаются между собою членомъ $2\Delta t$, т. е. чѣмъ меньше промежутокъ времени Δt для котораго вычисленъ средняя скорость, тѣмъ ближе подходитъ она къ скорости въ началѣ этого промежутка. Этотъ членъ и будетъ указывать, что средняя скорость зависитъ не только отъ t, но также и отъ Δt *).

Мы имѣемъ въ данномъ случаѣ передъ собою примѣръ, показывающій пользу такъ называемаго „способа предѣловъ". Дѣйствительно, какъ бы мы могли иначе вычислить скорость точки въ данное мгновеніе? Отъ дѣленія пройденнаго въ это мгновеніе пути на продолжительность мгновенія ничего бы не вышло, такъ какъ оба равны нулю. Мы получили бы $0/0$, т. е. неопредѣленность. Способъ предѣловъ и служитъ для раскрытія этой неопредѣленности. Способъ предѣловъ ведетъ такимъ образомъ къ достиженію цѣли окольнымъ путемъ; но разумѣется невозможность достичь цѣли прямо составляетъ не его недостатокъ, иногда ошибочно ему приписываемый. Необходимость въ подобномъ пріемѣ является результатомъ свойствъ нашего ума, неспособнаго непосредственно получить понятіе объ интересующемъ насъ вопросѣ.

Вмѣстѣ съ тѣмъ умѣнье пользоваться способомъ предѣловъ при изученіи соотношеній между измѣненіями различныхъ механическихъ величинъ настолько важно, что основательное, органическое усвоеніе основной идеи этого способа является настоятельно необходимымъ для лицъ, изучающихъ физико-математическія науки.

Обобщая понятіе о скорости движенія, какъ о быстротѣ измѣненія разстояній съ теченіемъ времени, мы можемъ самый порядокъ нахожденія ея рас-

*) Это и есть тотъ элементъ (§ 8), который указываетъ на принципіальное различіе между скоростью въ данное мгновеніе (предѣлъ) и средней скоростью (перемѣнная, имѣющая первую скорость своимъ предѣломъ)

пространить на отысканіе подобнаго же соотношенія между какой-либо функ цiей и независимой перемѣнной при непрерывномъ измѣненiи ихъ.

Произведемъ теперь вычисленiе по формулѣ:

$$v = \text{пр} \left(\frac{s_t \quad s_{t-\Delta t}}{\Delta t} \right)_{\Delta t = 0}$$

чтобы показать тождественность получаемыхъ результатовъ

$$s_t - s_{t \ \Delta t} = 2t^2 - t - [2 (t - \Delta t)^2 - (t - \Delta t)] =$$

$$= (4t - 1) \Delta t \quad 2 (\Delta t)^2$$

$$v_p = 4t \quad 1 - 2\Delta t$$

$$v = \text{пр.} (v_{cp}) = 4t - 1.$$

Впредь, если не будетъ оговорено будемъ пользоваться всегда вы раженiемъ

$$v_t = \text{пр} \left(\frac{s_{t \ +\Delta t} - s_t}{\Delta t} \right)_{\Delta t = 0}$$

Для сокращенiя письма часто значекъ Δt внизу скобокъ отки дываютъ; тогда получимъ

$$v = \text{пр} \left(\frac{s_{t+\Delta t} - s_t}{\Delta t} \right)$$

или полагая по принятому выше

$$s_{t \ +\Delta t} - s_t = \Delta s$$

получимъ

$$v = \text{пр} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right) \tag{26}$$

Слѣдуетъ помнить, что предѣлъ вычисляется подводя Δt къ нулю На основанiи послѣдняго уравненiя, скорость въ какое-либо мгно венiе можетъ быть опредѣлена какъ предѣлъ отношенiя прира щенiя пройденнаго точкою разстоянiя въ теченiе проме жутка времени къ этому промежутку.

Въ выраженiи (26) числитель будетъ функцiей времени дѣйстви тельно

$$s_{t+\Delta t} - s_t = f(t + \Delta t) - f(t)$$

Отъ дѣленiя его на элементъ времени Δt мы получимъ опять функ цiю времени; слѣдовательно, скорость, какъ это очевидно по самой сущности дѣла, будетъ функцiей лишь одной перемѣнной независи- мой — времени.

Изложимъ еще нѣкоторыя соображенiя, касающiяся вопроса объ опредѣленiи скорости въ данное мгновенiе, имѣя въ виду принци пiальную важность этого вопроса, какъ съ механической такъ и съ математической точки зрѣнiя.

Посмотримъ, какъ будетъ измѣняться величина средней скорости, соотвѣтствующей постепенно уменьшающимся промежуткамъ времени, имѣющимъ свои начала въ данномъ мгновеніи, для котораго мы желаемъ найти дѣйствительную скорость. Возьмемъ для этого частный примѣръ

$$s = 2t^2$$

Поставимъ задачей найти скорость въ концѣ второй секунды. Вычислимъ послѣдовательно среднія скорости для промежутковъ времени, слѣдующихъ за концомъ второй секунды и равныхъ: одной секундѣ (третья секунда отъ начала времени), $^1/_2$ сек., $^1/_{10}$ сек., $^1/_{100}$ сек. $^1/_{1000}$ сек. Пользуясь общимъ выраженіемъ скорости (25) будемъ имѣть

$$v_{cp} = \frac{2\,(t + \Delta t)^2 - 2t}{\Delta t} = \frac{4t\,\Delta t + 2\,(\Delta t)^2}{\Delta t} = 4t + 2\,\Delta t$$

Подставляя указанныя частныя значенія для Δt получимъ послѣдовательно:

Δt		v_{cp}
1	сек.	$4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 10$
$^1/_2$	»	$8 + 2 \cdot 0{,}5 = 9$
0,1	»	$8 + 2 \cdot 0{,}1 = 8{,}2$
0,01	»	$8 + 2 \cdot 0{,}01 = 8{,}02$
0,001	»	$8 + 2 \cdot 0{,}001 = 8{,}002$
0,000001	»	$8 + 2 \cdot 0{,}000001 = 8{,}000002$

Мы видимъ, что скорость по мѣрѣ уменьшенія промежутка времени уменьшается, при чемъ изъ постепенности уменьшенія видно, что величина ея подходитъ къ 8. Это значеніе мы и можемъ получить непосредственно, найдя предѣлъ средней скорости

$$\text{пр}\ (4t + 2\Delta t) = 4t$$

и положивъ въ немъ t равнымъ 2.

Такимъ образомъ по мѣрѣ уменьшенія промежутка времени вычисляемая средняя скорость все болѣе и болѣе приближается по величинѣ къ искомой и совпадаетъ съ нею тогда, когда величину промежутка мы примемъ равной нулю. Производя только что приведенныя вычисленія для постепенно уменьшающихся промежутковъ времени предшествующихъ концу второй секунды, придемъ къ тѣмъ же самымъ заключеніямъ.

Забѣгая нѣсколько впередъ замѣтимъ, что всякое тѣло, предоставленное самому себѣ, движется по началу инерціи равномѣрно (и прямолинейно), и если бы мы желали найти въ какое-либо мгновеніе скорость тѣла, движущагося неравномѣрно, то намъ надлежало бы, начиная съ этого мгновенія, устранить причины, нарушающія равномѣрность движенія; тогда тѣло, предоставленное самому себѣ, стало бы двигаться равномѣрно со скоростью, соотвѣтствующею указанному мгновенію. Для опредѣленія послѣдней намъ осталось бы только замѣтить разстояніе Δs, которое тѣло затѣмъ пройдетъ въ какой либо опредѣленный промежутокъ времени Δt. Частное $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ и дастъ искомую скорость; проще всего, разумѣется, взять для Δt одну секунду

§ 51 О приращеніи и диференціалѣ функціи Скорость какъ производная отъ разстоянія по времени

Сдѣлаемъ нѣсколько замѣчаній математическаго характера, относящихся къ вопросу объ опредѣленіи скорости перемѣннаго движенія.

Въ числитель, выражающій безконечномалое приращеніе разстоянія Δs, входятъ члены, содержащіе Δt въ различныхъ степеняхъ въ зависимости отъ того, какой степени будетъ функція: $s = f(t)$, полагая ее, вообще говоря n-ой степени для Δs получимъ выраженіе.

$$\Delta s = a\Delta t + b(\Delta t)^2 + c(\Delta t)^3 + \ldots$$

гдѣ a, b, c постоянные коефиціенты Дѣля затѣмъ Δs на Δt мы будемъ имѣть:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = a + b\Delta t + c(\Delta t) +$$

Когда же возьмемъ предѣлъ положивъ Δt равнымъ нулю то найдемъ

$$v = \text{пр} \frac{\Delta s}{\Delta t} = a$$

Такимъ образомъ въ предѣлѣ всѣ члены содержащіе Δt въ какой бы то ни было степени выше первой, исчезаютъ. Поэтому отыскивая предѣлъ отношенія

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

мы можемъ въ выраженіи для Δs откинуть всѣ члены содержащіе Δt въ степеняхъ выше первой, т. е вмѣсто выраженія

$$\Delta s = a\Delta t + b(\Delta t)^2 + c(\Delta t)^3 +$$

взять

$$a\Delta t = \Delta s - [b(\Delta t)^2 + c(\Delta t)^3 + \ldots]$$

Этой величинѣ въ отличіе отъ приращенія Δs функціи $s = f(t)$ присваиваютъ названіе **диференціала функціи** и обозначаютъ ее черезъ ds, т е вмѣсто значка Δ ставятъ d. Принимая такое обозначеніе, вмѣсто Δt пишутъ также dt, на основаніи того, что приращеніе независимой перемѣнной равно диференціалу ея, такъ какъ оно не содержитъ Δt въ высшихъ степеняхъ. Такимъ образомъ имѣемъ

$$ds = a\,dt$$

Слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что величина Δt или dt не зависитъ отъ t дѣйствительно, остановившись на нѣкоторомъ мгновеніи t, мы брали затѣмъ совершенно произвольную величину Δt, которую затѣмъ и подводили къ нулю

Если мы возьмемъ теперь отношеніе

$$\frac{ds}{dt},$$

то въ немъ уже нѣтъ необходимости брать предѣлъ, такъ какъ всѣ члены, содержавшіе Δt въ степеняхъ выше первой, откинуты, а потому можемъ прямо написать

$$v = \frac{ds}{dt}$$

т. е. скорость равна диференціалу разстоянія (функціи), дѣленному на диференціалъ времени (независимой перемѣнной). Подобное отношеніе называютъ производной функціи по независимой перемѣнной, а потому мы имѣемъ: скорость равна производной разстоянія (функція) по времени (независимая перемѣнная).

Практическая цѣль подобной замѣны та, что диференціалы функцій выражаются, а вслѣдствіе этого и опредѣляются проще, нежели приращенія ихъ. Дѣйствительно, если мы напр. имѣемъ

$$s = t - t^3,$$

то вычисляя по общей формулѣ (25), найдемъ:

$$v = 1 - 3t^2.$$

Отсюда

$$ds = v\,dt = (1 - 3t^2)\,dt.$$

Для приращенія же функціи получили бы выраженіе значительно сложнѣе:

$$\Delta s = (1 - 3t^2)\,\Delta t - 3t\,(\Delta t^2 - \Delta t)^3.$$

Производную функціи по независимой перемѣнной t обозначаютъ такъ

$$v = s_t\,.$$

Изъ изложеннаго ясно, что производная какой-либо функціи по независимой перемѣнной вообще даетъ понятіе о быстротѣ измѣненія (увеличенія или уменьшенія) функціи съ измѣненіемъ независимой перемѣнной.

Посмотримъ теперь какъ выражается графически диференціалъ функціи [1]). На фиг. 48 линія MN представляетъ уравненіе $s = f(t)$. Пусть $Oa = t$, $ab = \Delta t$. Тогда $Bb - Aa = BC = \Delta s$. Но скорость $v = \frac{ds}{dt}$ выражается тангенсомъ угла α образуемаго касательной AK въ точкѣ A съ осью абсцисъ (§ 51), т. е. $v = \frac{CD}{AC}$, а такъ какъ $AC = \Delta t = dt$, то $CD = ds$; такимъ образомъ диференціалъ функціи представляетъ собою разность между ординатами какой-либо точки касательной и точки касанія. Совокупность же членовъ выраженія Δs, заключающихъ въ себѣ Δt выше первой степени графически изображается отрѣзкомъ DB.

Опредѣленіе диференціаловъ и производныхъ различныхъ функцій составляетъ предметъ диференціальнаго исчисленія. Мы здѣсь укажемъ только, что производная функціи вида:

$$s = at^n$$

гдѣ k и n постоянныя имѣетъ форму.

$$v = s_t' = nat^{n-1};$$

такъ напр

$$v = (3t^2)_t' = 2 \cdot 3t^{2-1} = 6t.$$

$$v = (4t^2 - t)' = (4t^2)_t' - t' = 8t - 1$$

§ 52. Опредѣленіе скорости перемѣннаго движенія графически

Если зависимость между разстояніемъ и временемъ дана чертежемъ кривою MN (фиг. 48), то пользуясь изложенными выше со

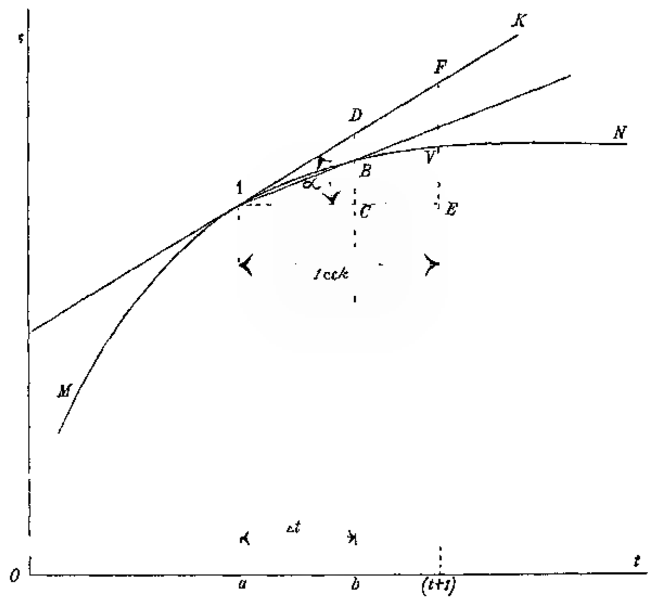
[1]) Графическое изображеніе приращенія функціи мы уже имѣли выше (§ 33)

ображеніями мы найдемъ безъ затрудненія графически скорость въ опредѣленное мгновеніе.

Средняя скорость въ теченіе промежутка времени Δt, слѣдующаго за концомъ t-ой секунды (отъ начала временъ) выразится отношеніемъ

$$\frac{BC}{AC}$$

или тангенсомъ угла, образуемаго сѣкущей AB съ осью временъ. Согласно сказанному, мы будемъ болѣе и болѣе приближаться къ ско-



рости въ данное мгновеніе, уменьшая промежутокъ времени Δt. Сѣкущая AB при этомъ будетъ ближе и ближе подходить къ касательной AK къ кривой разстояній въ точкѣ A и наконецъ, когда мы положимъ Δt равнымъ нулю, сѣкущая сольется съ касательной. Значеніе скорости въ это мгновеніе (по истеченіи t секундъ отъ начала временъ) мы найдемъ или какъ tg угла, образуемаго касательной AK съ осью временъ, или изъ отношенія $\frac{CD}{AC}$, или наконецъ она можетъ быть опредѣлена величиною, измѣренною въ единицахъ разстояній, отрѣзка EF отъ ординаты абсциса которой равна $(t+1)$ сек.; построеніе ясно изъ чертежа.

§ 53. Зависимость между скоростью и временемъ

Какъ ясно изъ самаго опредѣленія скорости, она есть функція времени, а потому зависимость между скоростью и временемъ подобно всякой другой зависимости между функціей и перемѣнной независимой (§ 4) можно выразить уравненіемъ графически и таблицей.

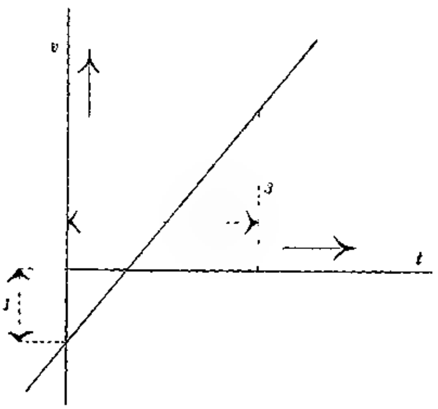
Въ разобранномъ выше примѣрѣ (§ 48) когда было дано

$$s = 2t^2 - t$$

мы нашли выраженіе для скорости

$$v = 4t - 1$$

Не представляется затрудненій представить эту функцію графически въ осяхъ временъ и скоростей (фиг. 49).



49

Полагая въ немъ $t = 0$ получимъ

$$v_0 = -1$$

Эту скорость, т. е. скорость точки въ началѣ временъ, называютъ начальной скоростью.

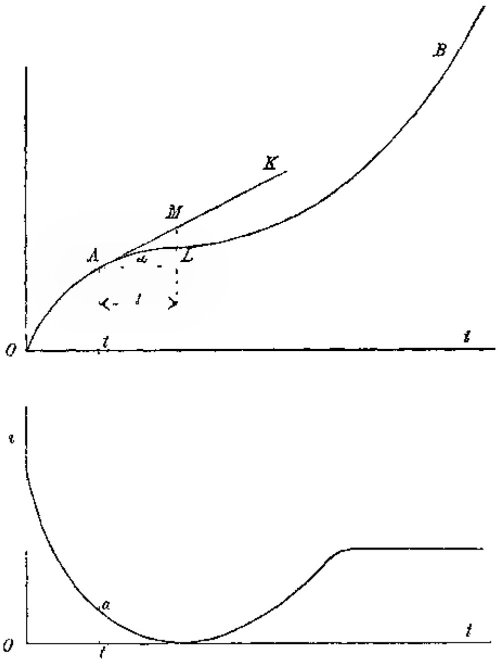
Здѣсь будетъ умѣстно замѣтить, что для даннаго уравненія разстояній скорость выражается функціей первой степени, а ранѣе разсматривая уравненіе разстояній, когда t входило также въ первой степени въ выраженіе для s, мы нашли, что въ такомъ случаѣ разстоянія проходимыя точкой, пропорціональны соотвѣтствующимъ промежуткамъ времени. Въ разсматриваемомъ теперь случаѣ мы, слѣдовательно, имѣемъ, что скорость измѣняется пропорціонально времени. Такое движеніе называютъ движеніемъ **равноперемѣннымъ** и въ частности **равноускореннымъ**, если скорость движенія съ теченіемъ времени возрастаетъ, какъ напр. во взятомъ случаѣ, и **равнозамедленнымъ**, если скорость уменьшается.

Величина же постояннаго отношенія Δv къ Δt носитъ названіе **ускоренія**.

Обобщая только что изложенное можно сказать, что если мы имѣемъ функцію первой степени, то приращенія функціи будутъ пропорціональны прира щеніямъ независимой перемѣнной, слѣдовательно быстрота измѣненія такой функціи съ измѣненіемъ независимой перемѣнной будетъ постоянной а значитъ и производная функціи будетъ величиной постоянной

§ 54. Построеніе кривой скоростей по кривой разстояній.

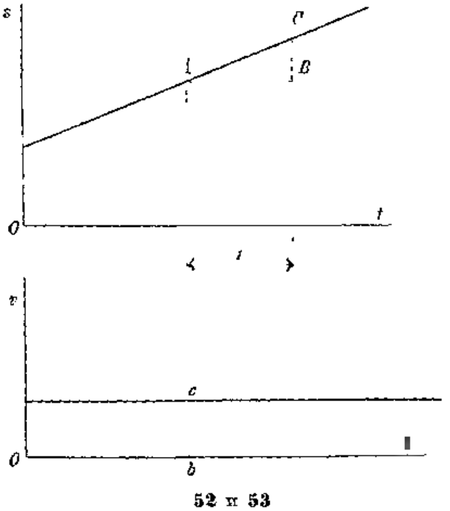
Пусть зависимость разстояній отъ времени дана графически кривою AB (фиг. 50). Поставимъ себѣ задачею построить кривую которая выражала бы зависимость между скоростью и временемъ въ этомъ движеніи или, короче, кривую скоростей даннаго движенія Для этого нужно будетъ найти значенія скоростей, соотвѣтствующія различнымъ мгновеніямъ. Пріемы, помощью которыхъ можетъ быть найдена скорость перемѣннаго движенія въ данное мгновеніе, были указаны выше (фиг. 48). Можно поступить напримѣръ такъ: въ точкѣ A кривой OB провести къ ней касательную AK, отложить по линіи Al, паралельной оси абсциссъ единицу времени въ соотвѣтствующемъ масштабѣ; изъ конца ея L возставить перпендикуляръ до пересѣченія съ касательной въ точкѣ M. Тогда отрѣзокъ LM, измѣренный единицами разстояній и дастъ численную величину скоростей въ мгновеніе t. Эту величину въ масштабѣ, принятомъ для скоростей нужно будетъ отложить на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ точки соотвѣтствующей тому же мгновенію t, что и точка A на кривой разстояній (фиг. 51). Слѣдовательно величину эту придется въ данномъ случаѣ отложить по оси скоростей. Если масштабъ разстояній и скоростей будетъ одинъ и тотъ же то найденная скорость выразится отрѣзкомъ LM



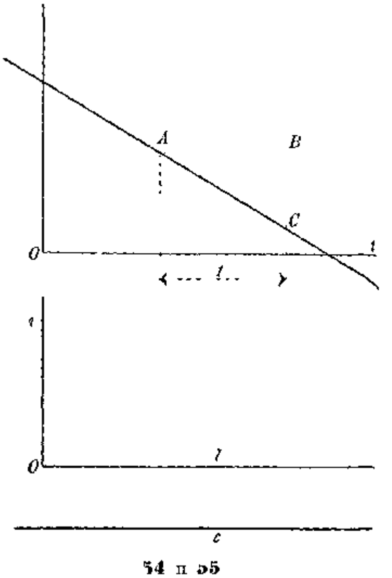
50 и 51

какъ это взято въ нашемъ примѣрѣ. Произведя подобное построеніе для другихъ мгновеній, опредѣлимъ рядъ значеній для скорости движенія и построимъ рядъ точекъ на фиг. 51. Соединивъ ихъ непрерывной кривой, мы и найдемъ графически зависимость скорости отъ времени для даннаго движенія. Для удобства построенія и наглядности его можно посовѣтовать чертежи располагать такъ какъ это сдѣлано на фиг. 50 и 51, и оставлять масштабъ для временъ безъ перемѣны, разумѣется, если какія-либо особыя условія не заставятъ отступить отъ этого.

Слѣдующіе характерные случаи понятны безъ дальнѣйшихъ объясненій (фиг. 52—55).



52 и 53



54 и 55

Графическій способъ опредѣленія скорости можетъ быть весьма полезенъ въ тѣхъ случаяхъ, когда при сложной зависимости разстоянія отъ времени аналитическое рѣшеніе вопроса примѣненіемъ общей формулы $v = \text{пр}\ \frac{\Delta s}{\Delta t}$ было бы затруднительно, такъ какъ при этомъ требуются часто различныя преобразованія въ формулахъ. Въ такомъ случаѣ наиболѣе простымъ будетъ построить кривую $s = f(t)$ по точкамъ и затѣмъ найти соотвѣтствующую кривую скоростей. Но такой пріемъ рѣшенія будетъ разумѣется, приблизительнымъ

§ 55. О наибольшихъ и наименьшихъ значеніяхъ разстояній.

Изъ кривой разстояній и соотвѣтствующей ей кривой скоростей не трудно усмотрѣть, что для тѣхъ мгновеній, для которыхъ пройденное точкою разстояніе s, выражающееся ординатами кривой разстояній, по сравненію съ сосѣдними (смежными) мгновеніями будетъ наибольшимъ или наименьшимъ, скорость равна нулю. Это вполнѣ понятно, такъ какъ въ подобныя мгновенія скорость мѣняетъ знакъ, а мѣняя его, въ силу условія непрерывности она должна пройти черезъ *нуль*.

Поэтому, если требуется найти наибольшее или наименьшее значеніе пройденнаго точкою разстоянія слѣдуетъ опредѣлять выраженіе скорости какъ функціи времени, положить ее *равной нулю* и изъ полученнаго уравненія найти время, отвѣчающее поставленному условію, а затѣмъ изъ уравненія разстояній опредѣлить значеніе послѣдняго и убѣдиться, будетъ ли s наибольшимъ или наименьшимъ.

Примѣнимъ сказанное къ слѣдующему примѣру:

$$s = 6t - t^2$$

находимъ

$$v = 6 - 2t$$

Полагая

$$v = 6 - 2t = 0$$

получимъ

$$t = 3$$

Подставляя эту величину въ данное уравненіе, найдемъ:

$$s = 6 \cdot 3 - 3^2 = 9$$

Чтобы выяснить, будетъ ли s имѣть наибольшее или наименьшее значеніе, можемъ поступить такъ: вычислимъ s для двухъ мгновеній: $(3 + \Delta t)$ и $(3 - \Delta t)$ и если обѣ найденныя величины будутъ больше s_3, то s_3 будетъ выражать наименьшее удаленіе точки отъ начала разстояній и наоборотъ. Произведя такое вычисленіе, будемъ имѣть:

$$s_{t+\Delta t} = 9 - (\Delta t)^2$$

$$s_{t-\Delta t} = 9 - (\Delta t)^2$$

слѣдовательно

$$s_3 > s_{t+\Delta t}$$

$$s_3 > s_{t-\Delta t}$$

т. е. точка находится въ концѣ третьей секунды на наибольшемъ удаленіи отъ начала разстояній. Найденный результатъ легко подтверждается графическимъ построеніемъ.

Какъ будетъ показано ниже, опредѣленіе того, будетъ ли найденное значеніе s наибольшимъ или наименьшимъ, легко производится, зная ускореніе въ данное мгновеніе (§ 78).

Наибольшему или наименьшему (по абсолютной величинѣ) значенію скорости на кривой разстояній соотвѣтствуетъ такъ наз. **точка перегиба**, въ которой, какъ это не трудно обнаружить построеніемъ, касательная къ кривой разстояній пересѣкаетъ кривую, которая переходитъ изъ выпуклой въ вогнутую

§ 56. Задачи.

1 а) Найти среднюю скорость движенія въ теченіе второй секунды, если дано

$$s = 12t - 3t^2.$$

б) Приближается тѣло къ началу разстояній или удаляется отъ него въ теченіе этого времени.

2. Найти среднюю скорость движенія при прохожденіи тѣломъ 9 ти метровъ, считая отъ начала разстояній, при данныхъ предыдущей задачи.

3. Найти скорость въ началѣ движенія въ концѣ первой и третьей секунды если:

$$а)\quad s = t^2 - 4 \qquad б)\quad s = 2t - 3t^2$$

4 Дано: $s = \frac{1}{t}$. а) Найти скорость

б) Построить кривую разстояній и соотвѣтствующую кривую скоростей.

5. Касательная къ кривой разстояній параллельна оси временъ Какова величина скорости въ это мгновеніе?

6. Дано: $s = 2t^2$. Найти. а) среднюю скорость во вторую секунду и опредѣлить въ какое мгновеніе въ теченіе этой секунды скорость равна найденной средней скорости.

б) Повѣрить рѣшеніе графически

7. Имѣемъ: $s = g\frac{t^2}{2}$, гдѣ g — постоянная а) Найти скорость тѣла въ концѣ t-ой сек

б) Отношеніе между скоростями въ концѣ t и t_1 секундъ

8 Написать уравненіе разстояній для предыдущей задачи въ томъ случаѣ, если тѣло имѣетъ начальную скорость v_0

9. На фиг. 56 представлена часть графика движенія желѣзнодорожныхъ поѣздовъ (зависимость разстоянія отъ времени) между станціями A B, C и D при чемъ по горизонтальной оси отложены времена, а по вертикали—разстоянія между станціями

Опредѣлить:

а) Скорости движенія поѣзда № 2 между станціями A и B B и C, C и D

б) Среднюю скорость того же поѣзда на всемъ протяженіи AD, включая остановки.

в) Построить графикъ поѣзда № 4, который выходитъ со станціи A въ 6 час. 34 м идетъ до станціи C со средней скоростью въ 40 вер. въ часъ, при чемъ на станціи C стоитъ 5 мин. и продолжаетъ движеніе со скоростью 30 вер. въ часъ

г) Составить расписаніе (заданіе движенія таблицей) для поѣзда № 4 (п. в)

10. Найти общее выраженіе скорости въ движеніи для котораго законъ разстояній таковъ:

$$s = at^m,$$

гдѣ m — цѣлое и положительное число.

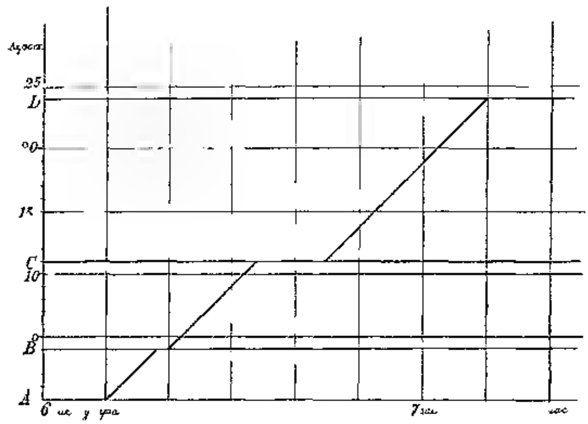
11. Построить кривыя разстояній

$$а)\ s = t^2 - 4t,\quad б)\ s = 2t$$

и соотвѣтствующія имъ кривыя скоростей.

12. Ордината кривой скоростей равна нулю. Что имѣемъ для этого мгновенія на кривой разстояній?

13. Найти скорость движенія какъ $f(t)$, если дано: $s = \sin t$. Сравнить кривыя разстояній и скоростей между собою (см. зад. 6, § 34).



14. Дана зависимость разстоянія отъ времени линіи AB (фиг. 57).
а) Построить соотвѣтствующую кривую скоростей.
б) Чѣмъ характеризуется точка перегиба на кривой скоростей (§ 55)?

15. Зависимость разстоянія отъ времени дана кривою (фиг. 58). Построить кривую скоростей.

16. а) Построить кривую скоростей, опредѣляемую уравненіемъ $v = \sqrt{4 - t^2}$.
б) Найти начальную скорость.
в) Найти время, по истеченіи котораго скорость будетъ равна 2; 5; 12?

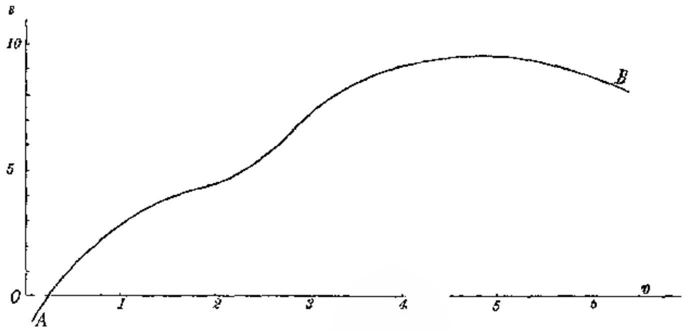
Рѣшенія задачъ.

1. а) $v_{ср} = \frac{s_2 - s_1}{1} = 3$

б) Тѣло удаляется въ положительную сторону отъ начала разстояній.

2. Опредѣляемъ два значенія для t изъ уравненія: $9 = 12t - 3t^2$; $v_{cp} = \frac{9}{t}$.

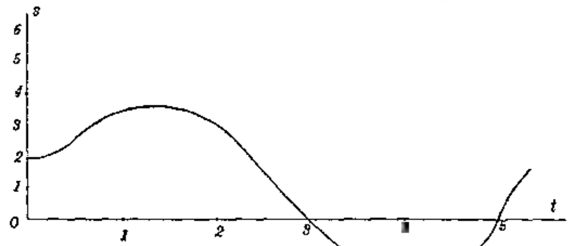
3. Пользуясь общей формулой. $v = \text{пр} \frac{\Delta s}{\Delta t}$, находимъ а) $v = 2t$,



57

б) $2 - 6t$. Ходъ вычисленій по указанной формулѣ см. § 50.

4. а) Пользуясь общей формулой $v = \text{пр.} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ (§ 50), находимъ $v = -\frac{1}{t^2}$.



58

б) § 54.

5. См. § 54.

6. а) $v_{cp} = \frac{s_2 - s_1}{1} = 6$, $v_t = 4t$, откуда находимъ мгновеніе для котораго $v = 6$, а именно: $6 = 4t$; $t = 1,5$.

7. а) $v_t = gt$;

б) $v_t : v_{t_1} = t : t_1$ (скорость пропорціональна времени).

8. $s = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$.

9 б) 24 вер час.

10 $$v = \text{пр}\ \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{a(t+\Delta t)^m - at^m}{\Delta t}.$$

По биному Ньютона:

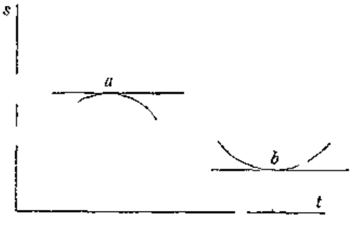
$$(t+\Delta t)^m = t^m + mt^{m-1}\Delta t + \ldots$$

Третьимъ и дальнѣйшимъ членами пренебрегаемъ такъ какъ они въ предѣлѣ обращаются въ нули (§ 51). Скорость

$$v = \text{пр.}\ \frac{amt^{m-1}\Delta t}{\Delta t} = amt^{m-1}.$$

11 См. § 54.

12. Касательная къ кривой разстояній паралельна оси временъ что можетъ быть въ слѣдующихъ случаяхъ (фиг. 59, *a* и *б*) Изъ нихъ въ первомъ точка находится на наибольшемъ разстояніи отъ начала по сравненію со смежными мгновеніями, во второмъ на наименьшемъ



59

13 $$v = \text{пр}\ \frac{s_{t+\Delta t} - s_t}{\Delta t} =$$

$$\text{пр}\ \frac{\sin(t+\Delta t) - \sin t}{\Delta t} =$$

$$= \text{пр}\ \frac{2\cos\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)\sin\frac{\Delta t}{2}}{\Delta t} = \text{пр}\ \cos\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta t}{2}}{\frac{\Delta t}{2}} =$$

$$= \text{пр}\ \cos\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right) \times \text{пр}\ \frac{\sin\frac{\Delta t}{2}}{\frac{\Delta t}{2}}$$

но

$$\text{пр}\ \cos\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)_{\Delta t = 0} = \cos t$$

$$\text{пр}\ \frac{\sin\frac{\Delta t}{2}}{\frac{\Delta t}{2}} = 1 \quad (\text{см}\ \S\ 72)$$

а потому

$$v = \cos t = \sin(t - 90).$$

Изъ послѣдняго выраженія видимъ, что кривая скоростей будетъ также синусоидой, но отстающей отъ кривой разстояній на промежутокъ времени, равный $\frac{\pi}{2}$ (90°)

14. а) См. § 54.

б) Наименьшимъ значеніемъ t но не равнымъ нулю

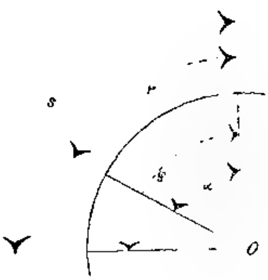
15 См § 54

§ 57 Равномѣрное круговое движеніе точки Угловая скорость единица ея.

Скорость равномѣрнаго движенія, какъ было найдено выше (§ 43) опредѣляется слѣдующимъ выраженіемъ:

$$v = \frac{s_{t+\Delta t} - s_t}{\Delta t}.$$

Величина разстоянія точки по окружности, или, что то же длина соотвѣтствующей дуги можетъ быть выражена въ зависимости отъ радіуса и центральнаго угла. Но предварительно скажемъ нѣсколько словъ относительно измѣренія дугъ частями радіуса и соотвѣтственно угловъ отвлеченными числами.



60

Примемъ за единицу мѣры угловъ такой уголъ, дуга котораго равна радіусу круга; обозначая этотъ уголъ черезъ α можемъ написать (фиг. 60):

$$\frac{\varphi}{s} = \frac{\alpha}{r}$$

Но такъ какъ $\angle \alpha$ принятъ за единицу то

$$\frac{\varphi}{s} = \frac{1}{r}$$

а отсюда имѣемъ

$$\varphi = \frac{s}{r} \qquad (27)$$

т е величина угла опредѣляется отношеніемъ дуги, стягивающей его, къ радіусу. Отношеніе это и показываетъ, сколько угловыхъ единицъ содержится въ данномъ углѣ. Такъ какъ при этомъ приходится дугу измѣрять длиною радіуса то углы будутъ измѣряться отвлеченными числами

Что касается величины угла, принятаго за единицу мѣры въ градусахъ, то она найдется изъ пропорціи

$$\frac{\alpha^\circ}{360} = \frac{r}{2\pi r}$$

откуда
$$\alpha^\circ = \frac{360}{2\pi} = 57^\circ,2958 = 57^\circ 17' 45''$$

Изъ формулы (27) находимъ:
$$s = r \cdot \varphi, \qquad (28)$$

т. е. длина дуги выражается произведеніемъ радіуса окружности на центральный уголъ, стягиваемый дугой.

Послѣднее равенство даетъ зависимость между s и φ, считая ихъ величинами перемѣнными, одну, напр. s, функціей, другую—независимой перемѣнной. Но въ качествѣ послѣдней у насъ по самому существу дѣла всегда служило время t. Если мы сохранимъ это положеніе и будемъ считать углы функціями времени—при чемъ въ каждомъ частномъ случаѣ подобная функція должна быть дана —, то разстоянія или дуги окружности будутъ уже не функціями независимой перемѣнной, а функціями другой функціи. Если намъ извѣстна функція $\varphi = f(t)$, то не представится затрудненій найти и s какъ функцію времени, а именно: $s = rf(t)$.

Возвращаясь къ прерванному изложенію о нахожденіи скорости углового движенія, можемъ написать, пользуясь уравненіемъ (28):
$$s_{t+\Delta t} = r\varphi_{t+\Delta t}$$
$$s_t = r\varphi_t.$$

Вычитая, найдемъ.
$$s_{t+\Delta t} - s_t = r(\varphi_{t+\Delta t} - \varphi_t)$$
или
$$\Delta s = r\Delta\varphi.$$
Но
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$
а потому
$$v = r\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \qquad (29)$$

Величину отношенія
$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

выражающаго быстроту измѣненія центральнаго угла соотвѣтствующаго разстоянію, пройденному точкой, называютъ угловой скоростью точки или угловой скоростью вращенія въ отличіе отъ разсматривавшейся до сихъ поръ линейной скорости. Линейная скорость въ данномъ случаѣ можетъ быть названа окружной скоростью.

Фиг. 61 представляетъ графическое изображеніе только что изложеннаго разсужденія.

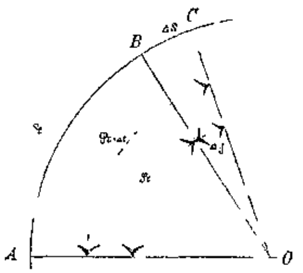
Положивъ въ выраженіи (29) $r = 1$ получимъ

$$[v]_{r=1} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Слѣдовательно, угловая скорость точки численно выражаетъ величину линейной скорости при движеніи точки по окружности, имѣющей радіусъ, равный единицѣ.

Угловую скорость обозначаютъ обыкновенно буквою ω. Такимъ образомъ имѣемъ

$$v = r\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (30)$$



61

Для опредѣленія линейной скорости движенія v необходимо знать угловую скорость и радіусъ вращенія.

Изъ выраженія для угловой скорости не трудно получить понятіе о единицахъ, которыми она измѣряется. Въ самомъ дѣлѣ, углы измѣряются отвлеченными числами, а потому

$$\omega = \frac{\Delta\varphi \text{ (отвлеч. число)}}{\Delta t \text{ ед. времени}}$$

или вводя принятыя выше символическія обозначенія (§ 44) получимъ

$$\text{измѣр } (\omega) = \frac{\text{отвлеч. число}}{\text{ед. времени}} = \frac{1}{T} = T^{-1}$$

§ 58. Зависимость между скоростью точки и числомъ оборотовъ ея.

Пусть число оборотовъ, совершаемыхъ движущеюся точкою въ минуту, будетъ n *). Точка, вращаясь по кругу, при одномъ оборотѣ опишетъ уголъ, равный 2π, а при n оборотахъ — $2\pi n$. Дѣля этотъ уголъ на соотвѣтствующій промежутокъ времени, т. е. на одну минуту или шестьдесятъ секундъ, мы и найдемъ угловую скорость

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \qquad (31)$$

Линейная же скорость будетъ равна

$$v = r\omega = 2\pi r\frac{n}{60} = \frac{\pi r n}{30}. \qquad (32)$$

Если будутъ извѣстны радіусъ вращенія r и линейная скорость v, то число оборотовъ, совершаемыхъ точкою въ минуту, опредѣлится по формулѣ:

$$n = \frac{30 v}{\pi r}. \qquad (33)$$

*) Число оборотовъ всегда относятъ къ минутѣ.

§ 59. Неравномѣрное движеніе точки по кругу. Угловая скорость.

Если движеніе точки по кругу будетъ перемѣннымъ (неравномѣрнымъ) то отношеніе

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

выражаетъ среднюю скорость за данный промежутокъ времени т е

$$v_{p} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Всегда справедливо

$$\Delta s = r \cdot \Delta \varphi$$

поэтому

$$v_{p} = \frac{r\,\Delta\varphi}{\Delta t} = r\,\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Частное

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega_{cp}$$

можетъ быть названо среднею угловою скоростью, соотвѣтствующею данному промежутку времени.

Линейная скорость точки въ данное мгновеніе выражается такъ

$$v = \text{пр}\ \frac{\Delta s}{\Delta t} = \text{пр}\left[r\,\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right]^{*)} = r\ \text{пр.}\ \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = r\,\omega \qquad (34)$$

при чемъ

$$\omega = \text{пр}\ \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \qquad (34\ a)$$

представляетъ угловую скорость въ данное мгновеніе. Такимъ образомъ угловой скоростью перемѣннаго движенія называется предѣлъ отношенія элементарнаго угла, описаннаго точкой къ соотвѣтствующему промежутку времени.

Выраженіе (34) даетъ зависимость между угловой и линейной (окружной) скоростью въ общемъ случаѣ круговаго движенія а именно

$$v = r\,\omega$$

или

$$\omega = \frac{v}{r}$$

Найдемъ теперь подобную же зависимость въ произвольномъ движеніи точки, для чего предварительно разсмотримъ вопросъ геометрическаго характера о кривизнѣ кривыхъ линій.

§ 60 О кривизнѣ кривыхъ линій

Дуга s круга въ зависимости отъ радіуса r и центральнаго

*) Радіусъ r — какъ число постоянное — можетъ быть вынесенъ изъ подъ знака предѣла (§ 13, слѣдствіе).

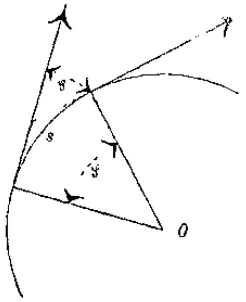
угла φ выражается какъ извѣстно такъ (27):

$$s = \varphi$$

Отсюда имѣемъ

$$\frac{\varphi}{s} = \frac{1}{r}$$

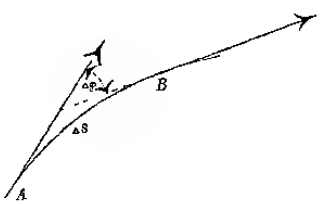
Если мы это выраженіе будемъ примѣнять къ кругамъ различныхъ радіусовъ, то отношеніе



62

$$\frac{\varphi}{s}$$

будетъ измѣняться обратно пропорціонально измѣненію радіуса, какъ показываетъ вторая часть уравненія. Мы можемъ, слѣдовательно, сказать: чѣмъ больше это отношеніе (или чѣмъ меньше напр. при одномъ и томъ же углѣ дуга s), тѣмъ меньшій радіусъ имѣетъ кругъ т. е. тѣмъ больше **кривизна круга**, подъ которой разумѣютъ отношеніе угла, соотвѣтствующаго данной дугѣ или, что то же, составленнаго касательными (фиг. 62), къ длинѣ дуги между точками касанія. Какъ будетъ видно далѣе (въ главѣ объ ускореніи), удобнѣе вводить въ опредѣленіе кривизны не уголъ между радіусами, а равный ему уголъ между касательными. Для круга написанное отношеніе, очевидно, сохраняетъ одну и ту же величину для любого угла, а потому и говорятъ, что кругъ есть **кривая постоянной кривизны.**



63

Понятіе о кривизнѣ распространяютъ кромѣ круга и на прочія кривыя линіи плоскія и двоякой кривизны *), при чемъ къ опредѣленію кривизны кривой въ данной точкѣ можно подойти путемъ слѣдующихъ соображеній:

Положимъ, что намъ нужно найти кривизну какой либо кривой AB въ точкѣ A (фиг. 63).

Возьмемъ нѣкоторую точку B, находящуюся отъ точки A на разстояніи Δs и проведемъ въ обѣихъ точкахъ касательныя къ кривой

*) Подъ **плоской** кривой разумѣютъ такую, всѣ точки которой лежатъ въ одной плоскости; кривая **двоякой кривизны** не можетъ быть совмѣщена съ плоскостью всѣми своими точками

Тогда отношеніе угла $\Delta\varphi$ къ длинѣ дуги Δs

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$$

можетъ быть названо среднею кривизною кривой на протяженіи дуги Δs или между точками A и B. Эта кривизна будетъ зависѣть, разумѣется, отъ длины дуги Δs и съ измѣненіемъ ея будетъ мѣняться. Чтобы найти кривизну кривой въ точкѣ A независимо отъ длины дуги Δs, нужно взять предѣлъ написаннаго отношенія при условіи подведенія Δs къ нулю т. е.

$$\text{пр}\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right)_{\Delta s = 0}$$

Слѣдовательно, кривизной кривой въ данной ея точкѣ называютъ предѣлъ ея средней кривизны.

Чтобы представить измѣреніе кривизны кривой болѣе наглядно вообразимъ себѣ черезъ точку A дугу такого круга, который своими точками, безконечномало удаленными отъ точки A подходилъ бы настолько близко къ точкамъ кривой AB чтобы мы могли вмѣсто

$$\text{пр}\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right)$$

взять предѣлъ отношенія угла $\Delta\varphi_1$ между касательными проведенными къ кругу, къ соотвѣтствующей дугѣ Δs_1, т. е. чтобы было соблюдено равенство

$$\text{пр}\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right) = \text{пр}\left(\frac{\Delta\varphi_1}{\Delta s_1}\right) \qquad (35)$$

Такой кругъ носитъ названіе круга кривизны кривой въ данной точкѣ ея и обозначая радіусъ его черезъ r имѣемъ

$$\text{пр}\ \frac{\Delta\varphi_1}{\Delta s_1} = \frac{\Delta\varphi_1}{\Delta s_1} = \frac{1}{r}$$

Откидываемъ во второмъ членѣ знакъ предѣла такъ какъ для круга отношеніе

$$\frac{\Delta\varphi_1}{\Delta s_1} = \frac{1}{r}$$

есть величина постоянная

Слѣдовательно

$$\text{пр}\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right) = \frac{1}{r} \qquad (36)$$

Радіусъ r называется радіусомъ круга кривизны или иначе, радіусомъ кривизны кривой въ данной ея точкѣ

Радіусъ кривизны кривой въ данной ея точкѣ откладывается внутрь кривой по прямой, называемой **главной нормалью**, направленіе которой опредѣляется пересѣченіемъ двухъ плоскостей, изъ которыхъ одна есть плоскость, перпендикулярная къ касательной въ данной точкѣ кривой и называемая **нормальной плоскостью**, а вторая есть **плоскость кривизны** кривой въ данной точкѣ которую находимъ такъ:

Если мы проведемъ плоскость черезъ касательную въ данной точкѣ кривой и черезъ точку, находящуюся отъ первой на очень маломъ разстояніи, то плоскость эта по мѣрѣ приближенія второй точки къ первой будетъ стремиться къ опредѣленному предѣльному положенію. Это предѣльное положеніе и представится **плоскостью кривизны**. Плоскость кривизны есть плоскость, къ которой кривая наиболѣе близко подходитъ своими точками безконечномало удаленными отъ точки касанія

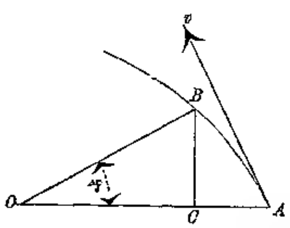
Въ случаѣ плоскихъ кривыхъ плоскость кривизны совпадаетъ съ плоскостью кривой, а главная нормаль или, просто, нормаль есть перпендикуляръ къ касательной въ точкѣ касанія.

Отложивъ по главной нормали длину радіуса кривизны, мы получаемъ точку, называемую **центромъ кривизны кривой** въ данной ея точкѣ. Это и будетъ **центръ круга кривизны въ данной точкѣ кривой**.

Если разсматриваемая кривая есть кругъ, то радіусъ его будетъ радіусомъ кривизны въ любой точкѣ круга, а центръ круга представляетъ центръ кривизны для любой точки круга.

§ 61. Зависимость между линейной и угловой скоростями точки въ произвольномъ движеніи

Пусть точка въ промежутокъ времени Δt прошла по криволинейной траекторіи AB разстояніе $\Delta s = AB$ (фиг. 64). Если O есть центръ кривизны траекторіи въ точкѣ A, то для угловой скорости въ данное мгновеніе, пользуясь изложеннымъ въ § 59, можемъ написать:



64

$$\omega = \text{пр}\ \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Далѣе имѣемъ

$$\sin \Delta\varphi = \frac{BC}{OB} = \frac{AB \sin BAC}{OB} = \Delta k \frac{\sin BAC}{OB}$$

Раздѣливъ обѣ части равенства на Δt и взявъ предѣлы ихъ, почучимъ

$$пр. \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta t} = пр \frac{\Delta k}{\Delta t} \quad пр. (\sin BAC) \quad пр \frac{1}{OB}$$

По такъ какъ

$$пр \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta t} - пр \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} - \omega \ (\S\ 72)$$

$$пр \frac{\Delta k}{\Delta t} = пр. \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad v \ (\S\ 62)$$

ъ

$$пр \ (\sin BAC) = \sin (v, r) \text{ и } пр \frac{1}{OB} \quad \frac{1}{OA} = \frac{1}{r}$$

то

$$\omega = \frac{v}{r} \sin (v\ r) \tag{37}$$

т е угловая скорость въ произвольномъ движенiи точки равна про изведенiю отношенiя линейной скорости къ радiусу кривизны на синусъ угла между ними.

Для кругового движенiя уголъ (v, r) равенъ 90° $\sin (v, r) = 1$ и мы находимъ полученное выше выраженiе (30)

$$\omega = \frac{v}{r}$$

§ 62. Опредѣленiе скорости по данной зависимости координатъ отъ времени. Предѣлъ отношенiя хорды ко времени

До сихъ поръ мы занимались вопросомъ о нахожденiи скорости въ томъ случаѣ, когда движенiе опредѣлялось траекторiей и зависи мостью разстоянiя отъ времени. Но движенiе можетъ быть дано также посредствомъ двухъ или нѣсколькихъ составляющихъ движенiй (глава II), въ частности зависимостью между координатами и временемъ т е.

$$x = f_1 (t),$$
$$y = f_2 (t),$$
$$z = f_3 (t).$$

Посмотримъ, какъ можно найти скорость въ этомъ случаѣ. Мы можемъ найти разстоянiя, пройденныя точкой въ каждомъ изъ со ставляющихъ движенiй въ теченiе нѣкотораго очень малаго проме жутка времени Δt разстоянiя эти будутъ таковы

$$\Delta x = x_{t+\Delta t} - x_t$$
$$\Delta y = y_{t+\Delta t} - y_t$$
$$\Delta z = z_{t+\Delta t} - z_t$$

Если бы, сложивъ ихъ геометрически, мы опредѣлили длину дѣйствительно пройденнаго точкою разстоянія по траекторіи, то взявъ предѣлъ отношенія его къ соотвѣтствующему промежутку времени мы и нашли бы скорость движенія Но сумма

$$\Delta x + \Delta y + \Delta z$$

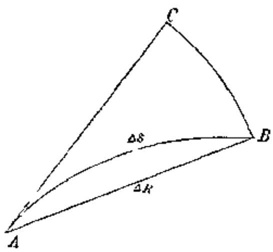
даетъ не дѣйствительное перемѣщеніе по траекторіи — Δs а только хорду его — Δk (§ 38), т. е.:

$$\overline{\Delta k} = \overline{\Delta x} + \overline{\Delta y} + \overline{\Delta z}$$

Но такъ какъ Δs всегда больше Δk, то и

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} > \frac{\Delta k}{\Delta t}$$

или средняя скорость въ теченіе даннаго промежутка времени будетъ больше средней скорости, въ томъ случаѣ, если бы точка двигалась по хордѣ. Но не трудно доказать, что въ предѣлѣ обѣ эти величины будутъ между собою равны, а именно:



65

$$\text{пр}\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)_{\Delta t = 0} = \text{пр}\left(\frac{\Delta k}{\Delta t}\right)_{\Delta t = 0} \qquad (38)$$

т. е. предѣлъ отношенія дуги, пройденной точкой по траекторіи, къ соотвѣтствующему промежутку времени равенъ предѣлу отношенія хорды, стягивающей дугу къ тому же промежутку времени.

Положимъ, что точка въ элементарный промежутокъ времени Δt прошла по траекторіи нѣкоторую дугу AB (фиг. 65); проведя хорду AB и касательную AC въ точкѣ A и описавъ окружность изъ той же точки радіусомъ AB, получимъ

$$AC + CB > \overset{\smile}{AB} > \bar{AB} \qquad (39)$$

гдѣ знакъ $\smile$ обозначаетъ дугу, а $-$ хорду

Замѣтимъ, что написанное равенство можетъ и не имѣть мѣста, напр. въ случаѣ, представленномъ на фиг. 66, когда дуга имѣетъ значительные изгибы, но такъ какъ промежутокъ времени Δt, которому соотвѣтствуетъ дуга AB, можетъ быть взятъ такъ малъ, какъ угодно (онъ идетъ къ нулю), то мы имѣемъ право выбрать его такой величины, чтобы въ предѣлахъ взятой дуги не было изгибовъ такому условію удовлетворяетъ напр. дуга AD. Согласно построенію на фиг. 65 имѣемъ $AC = AB$, а также

$$CB = AB \cdot \angle CAB$$

гдѣ $\angle CAB = \alpha$ измѣренъ въ частяхъ радіуса. По мѣрѣ уменьшенія дуги AB, когда линіи AB и AC идутъ къ совпаденію, уголъ идетъ къ нулю. Подставляя величину CB и AC изъ послѣднихъ равенствъ въ выраженіе (39), получаемъ:

$$AB + AB.\alpha > \overset{\frown}{AB} > AB$$

Вычтемъ изъ каждой части неравенства по AB

$$AB.\alpha > \overset{\frown}{AB} - AB > 0$$

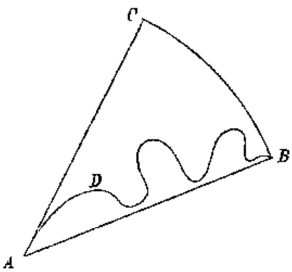
Неравенство не нарушится, если въ первой части вмѣсто хорды AB вставимъ дугу AB; тогда имѣемъ

$$\overset{\frown}{AB}.\alpha > \overset{\frown}{AB} - AB > 0$$

Вмѣсто α можемъ взять нѣкоторый уголъ $\alpha_1 < \alpha$, такъ чтобы

$$\overset{\frown}{AB}.\alpha_1 = \overset{\frown}{AB} - AB$$

Уголъ α_1, подобно α, идетъ къ нулю вмѣстѣ съ дугой AB (и промежуткомъ времени Δt).



66

Обѣ части равенства дѣлимъ на Δt

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{\Delta t}\,\alpha_1 = \frac{\overset{\frown}{AB}}{\Delta t} - \frac{AB}{\Delta t}$$

Возьмемъ предѣлы обѣихъ частей (§ 9, слѣд. 1)

$$\text{пр}\left(\frac{\overset{\frown}{AB}}{\Delta t}\,\alpha_1\right)_{\Delta t = 0} = \text{пр}\left(\frac{\overset{\frown}{AB}}{\Delta t} - \frac{AB}{\Delta t}\right)_{\Delta t = 0}$$

Но предѣлъ произведенія равенъ произведенію предѣловъ и предѣлъ суммы—суммѣ предѣловъ, а потому

$$\text{пр}\left(\frac{\overset{\frown}{AB}}{\Delta t}\right)\text{пр}\,(\alpha_1) = \text{пр}\left(\frac{\overset{\frown}{AB}}{\Delta t}\right) - \text{пр}\left(\frac{AB}{\Delta t}\right)$$

Здѣсь пр. $\left(\frac{\overset{\frown}{AB}}{\Delta t}\right) = v$, вообще говоря, нѣкоторая конечная величина, а пр. $(\alpha_1)_{\Delta t = 0} = 0$, а потому произведеніе

$$\text{пр}\left(\frac{\overset{\frown}{AB}}{\Delta t}\right)\text{пр}\,(\alpha_1) = v \cdot 0$$

слѣдовательно

$$\text{пр}\left(\frac{\overset{\frown}{AB}}{\Delta t}\right) - \text{пр}\left(\frac{\overline{AB}}{\Delta t}\right) = 0$$

откуда

$$\text{пр}\left(\frac{\overset{\frown}{AB}}{\Delta t}\right) = \text{пр.}\left(\frac{\overline{AB}}{\Delta t}\right)$$

Или же вводя принятыя ранѣе обозначенія имѣемъ

$$\text{пр}\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \text{пр}\left(\frac{\Delta k}{\Delta t}\right) \tag{40}$$

Примѣняя только что найденное положеніе для рѣшенія вопроса о скорости составного движенія будемъ имѣть для хорды его:

$$\overline{\Delta k} = \overline{\Delta x} + \overline{\Delta y} + \overline{\Delta z}.$$

Дѣля обѣ части равенства на Δt и беря предѣлы ихъ получимъ

$$v = \text{пр}\ \frac{\overline{\Delta k}}{\Delta t} = \text{пр}\ \frac{\overline{\Delta x}}{\Delta t} + \text{пр.}\ \frac{\overline{\Delta y}}{\Delta t} + \text{пр}\ \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta t}.$$

Слѣдуетъ впрочемъ замѣтить, что скорость составного движенія обыкновенно находится по способу, указываемому въ слѣдующей главѣ примѣненіемъ правила сложенія скоростей

§ 63. **Задачи.**

1. Какое число оборотовъ дѣлаетъ маховое колесо діаметромъ 3 м при окружной скорости въ 12 м. сек

2. Какому радіусу вращенія отвѣчаетъ окружная скорость (скорость вращенія) въ 7,5 м. сек. при числѣ оборотовъ $n = 110$ въ минуту?

3. Найти скорость точки земной поверхности при діаметрѣ земли d = 12.755 км. и времени оборота 23 часа 56′ 4″: а) на экваторѣ; б) на широтѣ въ 60°.

4. Найти соотношеніе между угловыми скоростями часовой и минутной стрѣлокъ.

5. Найти окружную скорость колеса діаметромъ 1,5 метр. дѣлающаго 100 обор. въ минуту

6. Часы указываютъ ровно N час. Въ какомъ часу стрѣлки сойдутся?

7. Кругъ радіуса r катится по плоскости. Найти соотношеніе между скоростью центра его и окружною скоростью?

8. Въ фиг. 67 изображена схема передачи поступательнаго движенія поршня K паровой машины посредствомъ штока s и шатуна l кривошипу OB. Очевидно, ходъ поршня или разстояніе h между крайними положеніями его a и b равняется діаметру круга описываемаго кривошипомъ

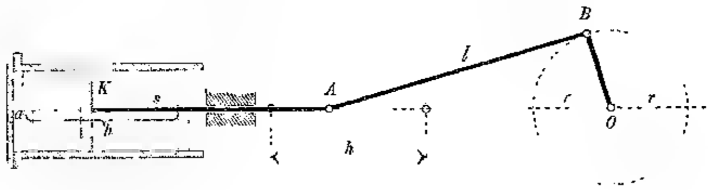
а) Опредѣлить зависимость между скоростью v' равномѣрнаго вращенія точки B кривошипа и средней скоростью поршня v''.

б) Найти скорости v' и v'' при числѣ оборотовъ вала $n = 35$ и радіусѣ круга, описываемаго кривошипомъ, $r = 0,6$ м.

в) Какъ велика угловая скорость кривошипа при этихъ данныхъ?

г) Какъ велико время полнаго оборота вала?

9. Шкивъ A діаметромъ $d = 1,5$ м дѣлаетъ $n = 48$ обор. въ мин.



67

Найти радіусъ шкива B (фиг. 68), соединеннаго съ первымъ ремнемъ, если число оборотовъ шкива должно равняться $n_2 = 100$.

10. Радіусъ шкива A (фиг. 68) равенъ 1,2 м.; радіусъ B—0,5 м. Найти число оборотовъ шкива A, если B дѣлаетъ въ минуту 60 оборотовъ.

Рѣшенія задачъ.

1. См. § 58.

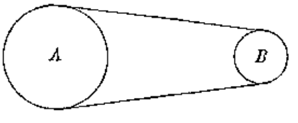
$$n = \frac{60\,v}{\pi d} = \infty\ 6\ \text{обор. въ мин.}$$

2. $r = 0,65$ м.

3. а) 465 м./сек. б) 232,5 м./сек.

4. Отношеніе равно $^1/_{12}$.

5. $v = \frac{\pi d n}{60} = \infty\ 7,9$ м./сек.



68

6. Число часовъ до встрѣчи обозначимъ черезъ n; тогда зависимости разстоянія отъ времени для часовой и минутной стрѣлки будутъ таковы:

$$s_{\text{час}} = n$$

$$s_{\text{мин.}} = N + n,$$

$$N + n = 12n,$$

откуда

$$N + n = \frac{12}{11}N$$

7. 1.

8. а) Разстоянія проходимые поршнемъ и кривошипомъ при одномъ оборотѣ вала, составляютъ: $2h$ и $2\pi r$ при чемъ $h = 2r$, а потому $v : v'' = 2\pi r : 2h = \pi : 2$;

б) $v' = 1{,}4$ м./сек.; $v' = 2{,}2$ м./сек. в) 3,67. г) 1,714 сек.

9 Разстоянія, проходимыя точками на ободѣ шкивовъ, равны между собою; слѣд. $2\pi r_1 n_1 = 2\pi r_2 n_2$. Изъ послѣдняго выраженія находимъ $r_2 = 0{,}36$ м.

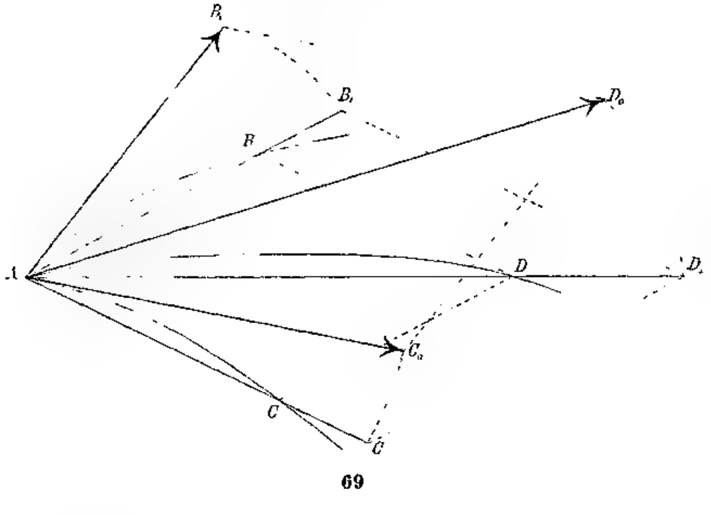
10. 25 обор. (см. предыд. задачу)

ГЛАВА IV

Сложенiе и разложенiе скоростей

§ 64. Общее правило сложенiя скоростей Паралелограмъ и многоугольникъ скоростей.

Вопросъ, который подлежитъ нашему разсмотрѣнiю въ настоящей главѣ, состоитъ въ нахожденiи скорости составного движенiя въ опредѣленное мгновенiе по скоростямъ движенiй составляющихъ



69

или, короче, въ нахожденiи составной скорости по скоростямъ составляющимъ.

Разсмотримъ случай, когда точка имѣетъ два движенiя по двумъ траекторiямъ AB и AC (фиг. 69); кромѣ траекторiи для каждаго изъ движенiй очевидно должна быть дана зависимость разстоянiя отъ времени

Пусть движущаяся точка въ концѣ времени t находится въ положенiи, обозначенномъ буквою A Возьмемъ нѣкоторый промежутокъ времени, въ продолженіе котораго точка перемѣстится по траекторіи AB изъ положенія A въ B, а по другой траекторіи изъ A въ C.

Если точка будетъ обладать обоими движеньями, то въ теченіе промежутка Δt она перемѣстится въ точку D, которую найдемъ по извѣстнымъ правиламъ, построивъ на хордахъ составляющихъ перемѣщеній AB и AC параллелограмъ, діагональ котораго AD и будетъ хордой составного перемѣщенія, само же перемѣщеніе совершится, вообще говоря, по нѣкоторой кривой AD. Если мы раздѣлимъ теперь каждую изъ хордъ AB, AC и AD на Δt, то частныя отъ дѣленія

$$AB_1 = \frac{AB}{\Delta t}, \quad AC_1 = \frac{AC}{\Delta t} \text{ и } AD_1 = \frac{AD}{\Delta t},$$

представятся прямолинейными отрѣзками, отложенными по продолженію соотвѣтствующихъ хордъ AB, AC и AD. Отрѣзки AB_1, AC_1 и AD_1, очевидно, составятъ параллелограмъ. Если мы возьмемъ предѣлы хордъ по времени или, иначе, предѣлы величинъ AB_1, AC_1 и AD_1, подводя промежутокъ времени Δt къ нулю, то мы найдемъ скорости движеній составляющихъ и составного, которыя и выразятся нѣкоторыми векторами AB_0, AC_0, AD_0, касательными къ соотвѣтствующимъ траекторіямъ, при чемъ

$$AB_0 = \text{пр.}\, AB_1 = \text{пр.}\left(\frac{\overline{AB}}{\Delta t}\right) =$$

$$AC_0 = \text{пр.}\left(\frac{\overline{AC}}{\Delta t}\right) =$$

$$AD_0 = \text{пр.}\left(\frac{\overline{AD}}{\Delta t}\right) = V$$

здѣсь V — скорость составного движенія, v_1 и v_2 — скорости составляющія.

Укажемъ теперь то соотношеніе, которое существуетъ между V, v_1 и v_2; тогда получивъ v_1 и v_2 непосредственно изъ заданія составляющихъ движеній, можно будетъ найти V. На чертежѣ вектора AB_0, AC_0 и AD_0 изображены составляющими параллелограмъ, что мы и докажемъ въ слѣдующемъ параграфѣ. Полагая, что это имѣетъ мѣсто, мы можемъ слѣдующимъ образомъ прочесть правило для сложенія скоростей: **составная скорость есть діагональ параллелограма, построеннаго на скоростяхъ движеній составляющихъ**, или иначе: **скорость составного движенія выражается замыкающей стороной треугольника, другія стороны котораго суть скорости составляющихъ движеній**; еще иначе: **составная скорость есть геометрическая сумма** скоростей составляющихъ. Доказавъ, что двѣ скорости складываются по правиламъ сложенія векторовъ, мы можемъ правила эти безъ дальнѣйшихъ оговорокъ распространить и на произвольное число скоростей, сказавъ, что всѣ дѣйствія надъ геометрическими величинами (сложеніе и разложеніе ихъ) могутъ быть примѣнены къ скоростямъ.

Обозначая составную скорость черезъ V скорости составляющія черезъ $v_1, v_2, v_3 \ldots$, будемъ имѣть

$$V = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n$$

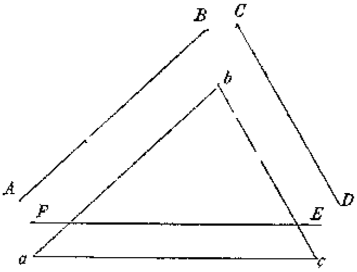
или

$$V = \sum_1^n v \qquad (41)$$

Докажемъ теперь упомянутую теорему, относя ее не только къ скоростямъ, а вообще къ какимъ бы ни было векторамъ.

§ 65. Если три перемѣнные вектора при всѣхъ своихъ положеніяхъ составляютъ треугольникъ, то и предѣлы ихъ также составляютъ треугольникъ.

Предварительно замѣтимъ, что предѣломъ даннаго перемѣннаго вектора называютъ такой постоянный (по величинѣ и направленію) векторъ, къ которому перемѣнный векторъ можетъ быть подведенъ такъ близко по своему направленію и по величинѣ, какъ мы того пожелаемъ. При этомъ концы обоихъ векторовъ будутъ находиться на безконечномаломъ разстояніи другъ отъ друга, или одна пара ихъ можетъ совпадать.



70

Возьмемъ три перемѣнные вектора ab, bc и ca, образующіе по условію треугольникъ (фиг. 70).

Предположимъ, что предѣлы ихъ AB, CD и EF не образуютъ треугольника; посмотримъ, къ какому выводу мы придемъ при такомъ предположеніи. Соединимъ точки B, C и b между собою прямыми; тогда получимъ

$$Bb + bC > BC$$

Въ этомъ неравенствѣ BC есть нѣкоторая опредѣленная, постоянная и во всякомъ случаѣ конечная величина. Первая же часть представляетъ сумму двухъ перемѣнныхъ величинъ, изъ которыхъ каждая, а слѣдовательно и сумма ихъ на основаніи того, что постоянные (по величинѣ и направленію) отрѣзки AB, CD и EF суть соотвѣтственно предѣлы перемѣнныхъ отрѣзковъ ab, bc и ac,—можетъ быть сдѣлана менѣе какой угодно величины. Конечная же линія BC должна быть еще меньше послѣдней. Отсюда заключаемъ что $BC = 0$.

Если бы векторы AB и CD не были постоянными по величинѣ и направленію, а перемѣнными, то при наличности послѣдняго неравенства отрѣзокъ BC былъ бы равенъ безконечно малой величинѣ.

Слѣдовательно точки B и C должны совпадать, то же самое можно доказать и относительно другихъ вершинъ треугольника. Такимъ образомъ мы приходимъ къ заключенію, что предѣлы трехъ векторовъ, всегда образующихъ треугольникъ также составляютъ треугольникъ.

Доказанная теорема можетъ быть прочитана еще и такъ: предѣлъ суммы (геометрической) двухъ данныхъ векторовъ будетъ суммой предѣловъ тѣхъ же векторовъ.

Примѣненіе этой теоремы къ вопросу о сложеніи скоростей было указано выше.

§ 66. Частные случаи сложенія скоростей.

Приложимъ сдѣланныя общія разсужденія къ частнымъ случаямъ.

1. Если мы имѣемъ два прямолинейныхъ равномѣрныхъ движенія, то не трудно доказать, что и составное движеніе будетъ во первыхъ равномѣрнымъ, а во вторыхъ прямолинейнымъ.

Дѣйствительно, скорость каждаго изъ составляющихъ движеній изобразится векторомъ постояннымъ по величинѣ (условіе равномѣрности) и по направленію (условіе прямолинейности). Слѣдовательно и геометрическая сумма ихъ (скорость составного движенія) будетъ векторомъ постояннымъ по величинѣ и направленію.

2. Движеніе задано прямоугольными координатами движущейся точки:

$$x = f_1(t),$$

$$y = f_2(t),$$

$$z = f_3(t).$$

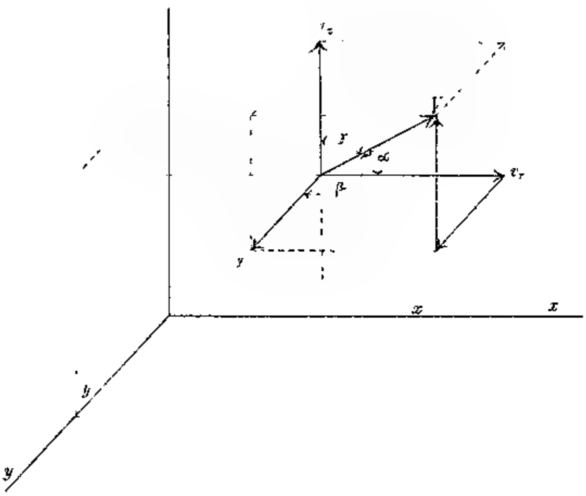
Обозначимъ скорости по осямъ соотвѣтственно v_x, v_y, v_z, а скорость составную V. Первыя легко опредѣляются изъ приведенныхъ зависимостей координатъ отъ времени, а сложивъ ихъ, получимъ v.

Въ данномъ случаѣ зависимость между всѣми этими скоростями выражается весьма просто аналитически, подобно приведенной выше зависимости между хордами составного и составляющихъ движеній.

Ввиду этого, не приводя выводовъ, напишемъ (фиг 71)

$$
\left.
\begin{aligned}
\overline{V} &= \overline{v_x} + \overline{v_y} + \overline{v_z} = \sqrt{\overline{v_x}^2 + \overline{v_y}^2 + \overline{v_z}^2} \\
v_x &= V \cos (v, x) = V \cos \alpha \\
v_y &= V \cos (v, y) = V \cos \beta, \\
v_z &= V \cos (v, z) = V \cos \gamma,
\end{aligned}
\right\} \qquad (42),
$$

т е скорости проекцій движущейся точки по осямъ равны



71

проекціямъ скорости на эти оси Направленіе составной скорости опредѣляется выраженіями

$$
\left.
\begin{aligned}
\cos \alpha &= \frac{v_x}{V} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}, \\
\cos \beta &= \frac{v_y}{V}, \\
\cos \gamma &= \frac{v_z}{V}
\end{aligned}
\right\} \qquad (43)
$$

Въ частномъ случаѣ если

$$v_z = 0,$$

то движеніе происходитъ въ плоскости параллельной плоскости XOY

Если же $z = 0$, то точка движется въ плоскости XOY.

Если

$$v_x = v_y = v_z = 0,$$

то и

$$V = 0,$$

т. е. точка покоится, и обратно: для того, чтобы точка находилась въ покоѣ, необходимо должны быть одновременно равны нулю проекціи скорости ея на каждую изъ трехъ взаимноперпендикулярныхъ осей.

Основываясь на изложенномъ въ § 51, имѣемъ

$$v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt},\ v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

§ 67. Задачи.

1. Скорость лодки, пересѣкающей рѣку въ направленіи, перпендикулярномъ къ берегамъ, равна 5 вер. въ часъ, скорость теченія 4 вер. Найти скорость V движенія лодки и направленіе ея относительно оси рѣки.

2. При скоростяхъ, указанныхъ въ предыдущей задачѣ, найти въ какомъ направленіи должна двигаться лодка, чтобы дѣйствительное движеніе ея совершалось по перпендикуляру къ оси рѣки. Изслѣдовать полученное рѣшеніе.

3. Пароходъ прошелъ по рѣкѣ противъ теченія въ 2 часа 32 вер.; какова скорость движенія его v въ метр. сек. въ стоячей водѣ, если скорость теченія рѣки 4 вер. въ часъ? (1 саж. = 2,13 метр.).

4. Лодка пересѣкаетъ рѣку въ теченіе 4 мин. по направленію перпендикулярному къ оси рѣки, ширина которой равна 300 м., а скорость теченія—0,8 м. Найти скорость относительнаго движенія лодки и уголъ, составляемый направленіемъ его съ осью рѣки.

5. Дано:

$$x = 2 - 3t$$
$$y = t + 4.$$

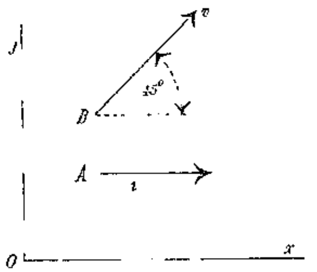
а) Найти скорость составного движенія и построить графически зависимость ея отъ времени. б) Показать, что составное движеніе будетъ равномѣрнымъ и прямолинейнымъ.

6. Точка движется равномѣрно по окружности радіуса r м., проходя ее въ t сек. Найти проекціи составной скорости на двѣ взаимноперпендикулярныя оси, проходящія черезъ центръ круга.

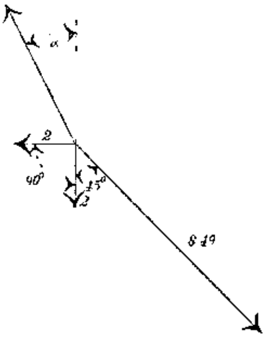
7. Мы наблюдаемъ скорость $v'' = 2t$ точки B относительно точки A (фиг. 72), при чемъ послѣдняя движется со скоростью $v' = 1 + 3t$. Найти величину и направленіе составной скорости точки B.

8. Составная скорость равна 5 м./сек.; одна изъ составляющихъ равна 10 м./сек. и образуетъ съ составной скоростью уголъ 90°. Найти вторую (графически и аналитически).

9. Найти графически составную скорость, если составляющія ея и углы, ими образуемые, представлены на фиг. 73, при чемъ $tg\,\alpha = 0{,}5$.



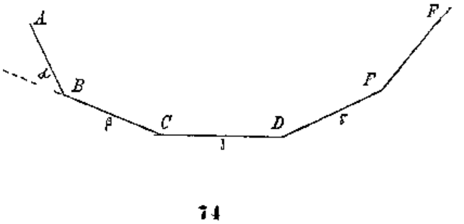
72



73

10. Точка имѣетъ три одинаковыя по величинѣ скорости, лежащія въ одной плоскости и образующія между собою углы въ 120°. Найти составную скорость.

11. Тѣло имѣющее начальную скорость v_0, движется вдоль ломаной линіи $ABCDEF$ (фиг. 74); углы, образуемые прямолинейными участками ея другъ съ другомъ, суть α, β, γ, δ. Какую скорость будетъ имѣть тѣло въ точкѣ F, предполагая, что составляющія скоростей, направленныя перпендикулярно къ ломаной уничтожаются?



74

12. Точка имѣетъ четыре скорости, лежащія въ одной вертикальной плоскости и равныя 12 м./сек., 24 м./сек., 36 м./сек. и 48 м./сек. Скорости эти образуютъ съ горизонтальной осью углы въ 16°, 29°, 33° и 75°.

Найти: а) величину составной скорости и б) направленіе ея.

13. Изъ окна поѣзда брошенъ камень со скоростью 5 м./сек. по направленію, перпендикулярному линіи дороги, въ поѣздъ, идущій

по другому пути. Съ какой скоростью (по величинѣ и направленію) ударится камень въ послѣдній поѣздъ, если: а) оба поѣзда идутъ въ одну сторону съ одинаковой скоростью?

б) первый поѣздъ стоитъ на мѣстѣ, второй движется со скоростью 15 м./сек.?

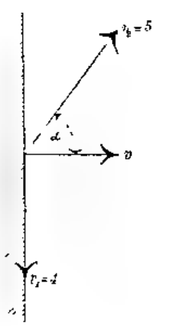
в) оба поѣзда движутся въ различныя стороны со скоростью 15 м. сек.?

Рѣшенія задачъ

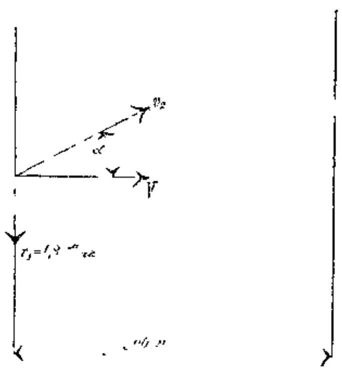
1. $V = \sqrt{5^2 + 4^2}$.

2. $v = \sqrt{v_2^2 - v_1^2} = 3$ (фиг. 75); $\sin\alpha = \frac{v_1}{v_2} = \frac{4}{5}$. Чтобы вопросъ былъ возможенъ, должно быть $v_2 > v$.

3. 5,9 м./сек.



75



76

4. Скорость составного движенія лодки

$$V = \frac{300}{4 . 60} = 1,25 \text{ м./сек. (фиг. 76)}$$

Скорость относительнаго движенія

$$v_2 = \sqrt{1,25^2 + 0,8^2} = 1,48 \text{ м. сек.},$$

$$\sin\alpha = \frac{v_1}{V} = \frac{0,8}{1,25} = 0,64 \qquad \angle\alpha = 39^\circ 50'$$

5. а) $v_x = -3$, $v_y = 1$, $V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{10}$. б) См. § 66.

6. $v_x = -V\cos\alpha$, $v_y = V\sin\alpha$, причемъ $V = \frac{2\pi r}{t}$ (фиг. 77).

7. Составная скорость точки B равна геометрической суммѣ скоростей v' и v''. Удобнѣе опредѣлить эту скорость посредствомъ сост-

ляющихъ ея по направленіямъ (осямъ) Ox и Oy. Находимъ

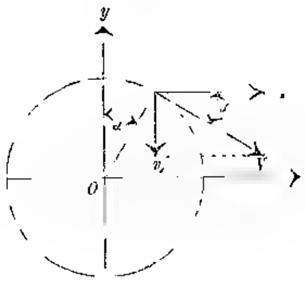
$$V_x = v_x'' + v' = 2t\cos 45^\circ + 1 + 3t = (3 + \sqrt{2})\,t + 1$$

$$V_y = v_y = 2t\cos 45^\circ = t\sqrt{2}$$

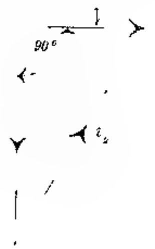
$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

$$\cos(V, Ox) = \frac{V_x}{V} = \frac{V_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}$$

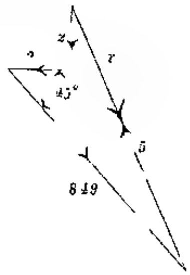
8. $V = 5$; $v_1 = 10$; $v_2 = \sqrt{V^2 + v_1^2} = \sqrt{125}$. (фиг. 78)



77



78



79

9. Составная скорость v равна ~4 и направлена одинаково со скоростью, равной 5 (фиг. 79).

10. Составная скорость равна нулю

11. $v = v_0 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \cos\delta$.

12. а) $v_x = 75{,}142$; $v_y = 80{,}915$; $V = 110{,}424$.

б) Уголъ $(V, x) = 47^\circ 7' 10''$; уголъ $(V, y) = 42^\circ 52' 50''$.

13. а) 5 м./сек.; направленіе перпендикулярно поѣзду

б) 15,8 м./сек. подъ угломъ 161°35′

в) 30,4 м./сек. подъ угломъ 170°30′

ГЛАВА V

Ускоренiе

§ 68. Понятiе объ ускоренiи, какъ о величинѣ опредѣляющей быстроту измѣненiя скорости. Среднее ускоренiе.

При опредѣленiи величины скорости по данной зависимости разстоянiя отъ времени мы нашли ее какъ функцiю времени, которая въ зависимости отъ него измѣняется по тому или другому закону. Кромѣ величины скорость, какъ векторъ, имѣетъ опредѣленное направленiе, которое также можетъ измѣняться съ теченiемъ времени. Если мы желаемъ, слѣдовательно, всесторонне изучить скорость какъ механическую величину, намъ нужно познакомиться со способами, которые давали бы возможность судить объ измѣненiи скорости въ зависимости отъ времени какъ по величинѣ, такъ и по направленiю. Величина, опредѣляющая собою быстроту полнаго измѣненiя скорости, носитъ названiе **ускоренiя**. Очевидно, ускоренiе такъ же, какъ и скорость, должно быть векторомъ (геометрической величиной).

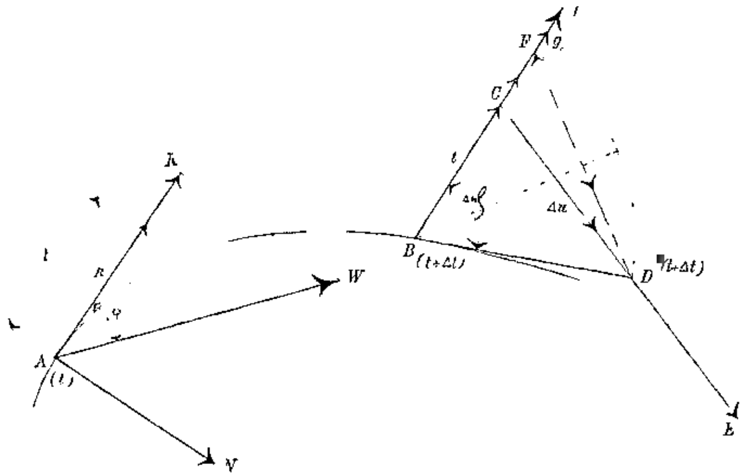
Итакъ, положимъ, что намъ задано движенiе траекторiей и зависимостью между разстоянiемъ и временемъ. Опредѣлимъ по общимъ правиламъ скорость, которую будетъ имѣть движущаяся точка въ нѣкоторое мгновенiе t находясь въ положенiи A (фиг. 80); обозначимъ ее v_t. Пусть черезъ промежутокъ времени Δt точка перейдетъ въ B и скорость ея изобразится векторомъ $v_{t+\Delta t}$. Геометрическая разность этихъ скоростей

$$\Delta \overline{u} = v_{t+\Delta t} - v_t \qquad (44)$$

покажетъ полное измѣненiе скорости v_t въ теченiе промежутка Δt *). Чтобы найти эту разность, проведемъ изъ точки B векторъ, равный v_t и соединимъ конецъ его съ концомъ отрѣзка $v_{t+\Delta t}$ прямой, придавъ ей направленiе отъ v_t къ $v_{t+\Delta t}$. Эта линiя и будетъ изображать измѣненiе или приращенiе Δu скорости v_t; ее называютъ также

*) Для геометрической разности скоростей или полнаго приращенiя скорости мы беремъ знакъ Δu, сохраняя обозначенiе Δv для приращенiя скорости по величинѣ (алгебраическое измѣненiе).

пріобрѣтенною скоростью въ теченіе времени Δt. Пріобрѣтенная скорость, взятая сама по себѣ безъ отношенія къ соотвѣтствующему промежутку времени, еще не въ состояніи опредѣлить быстроту измѣненія скорости. Дѣйствительно, если мы имѣемъ два движенія и намъ скажутъ, что въ первомъ скорость возросла на 2 $\frac{\text{метр}}{\text{сек}}$, а во второмъ на 10 $\frac{\text{метр}}{\text{сек.}}$, мы еще не можемъ сказать, что въ послѣднемъ случаѣ скорость измѣнялась быстрѣе, такъ какъ скорость въ этомъ движеніи могла увеличиться на приведенную цифру въ сутки, а въ первомъ



80

движеніи это могло случиться въ секунду. Искомую быстроту, съ которой происходитъ измѣненіе скорости въ зависимости отъ времени, мы найдемъ, взявъ отношеніе пріобрѣтенной скорости $\Delta\bar{u}$ къ промежутку времени Δt, т. е.

$$\frac{\Delta\bar{u}}{\Delta t}.$$

Ставимъ черточку надъ Δu потому, что въ разсматриваемомъ случаѣ для насъ важна не только численная величина Δu, но и направленіе ея. Величину этого отношенія называютъ среднимъ ускореніемъ (w_{cp}), соотвѣтствующимъ данному промежутку времени Δt. Графически ускореніе это выразится векторомъ $\overline{CE}$, имѣющимъ то же направленіе, что и пріобрѣтенная скорость $\Delta\bar{u}$, такъ какъ ускореніе это получается отъ дѣленія послѣдней на величину Δt, неимѣющую направленія. Слѣдовательно

$$w = \frac{\Delta u}{\Delta t}. \tag{45}$$

§ 69. Единица ускоренія

Единицы, служащія для измѣренія средняго, а слѣдовательно и всякаго другого ускоренія, очевидно, не будутъ единицами скорости, такъ какъ для полученія ускоренія, мы дѣлимъ скорость на время. Единица ускоренія w будетъ представлять единицу скорости, дѣленную на единицу времени, а потому измѣреніе ускоренія будетъ:

$$\text{измѣр. } (w) = \frac{\text{измѣр. } v}{\text{измѣр. } t} = \frac{\frac{\text{измѣр. } s}{\text{измѣр. } t}}{\text{измѣр. } t} = \frac{\text{измѣр. } s}{\text{измѣр. } t^2},$$

или, согласно принятому символическому обозначенію (§ 44, L — измѣреніе единицы длины, T — времени), получимъ:

$$\text{измѣр. } w = \frac{L}{T^2} = LT^{-2}. \tag{46}$$

§ 70. Ускореніе въ данное мгновеніе въ произвольномъ движеніи. Касательное ускореніе

Разсмотримъ теперь вопросъ: можно ли удовольствоваться среднимъ ускореніемъ для опредѣленія быстроты измѣненія скорости въ данное мгновеніе? Иначе говоря, будетъ ли среднее ускореніе вмѣстѣ съ тѣмъ и ускореніемъ въ данное мгновеніе?

Для большей ясности и опредѣленности нашихъ дальнѣйшихъ разсужденій, представимъ пріобрѣтенную скорость, а затѣмъ и среднее ускореніе въ видѣ суммы двухъ векторовъ, изъ которыхъ одинъ опредѣлялъ бы измѣненіе скорости по величинѣ, а другой — по направленію. Для этого, взявъ точку B за центръ (фиг. 80), опишемъ дугу радіусомъ $v_{t+\Delta t}$ до пересѣченія съ продолженіемъ отрѣзка v_t въ точкѣ F и соединимъ точку D съ F прямою, давъ ей направленіе отъ F къ D. Въ такомъ случаѣ въ треугольникѣ CFD сторона CD (пріобрѣтенная скорость Δu) будетъ геометрической суммой сторонъ CF и FD, а слѣдовательно мы можемъ сказать, что приращеніе скорости v_t въ теченіе времени Δt измѣряется этой суммой, т. е.

$$v_{t+\Delta t} + \overline{v}_t = \Delta u = CF + FD. \tag{47}$$

А теперь уже легко видѣть, что векторъ CF представляетъ собою приращеніе скорости по величинѣ; вектору же FD остается только указать измѣненіе скорости по направленію.

Если бы движеніе было прямолинейнымъ, т. е. скорость по направленію оставалась бы постоянной, то FD было бы равно нулю и тогда имѣли бы

$$v_{t+\Delta t} - v_t = CF,$$

т. е. полное измѣненіе скорости выражалось бы величиною CF. Такимъ образомъ членъ, показывающій измѣненіе скорости въ произвольномъ (криволинейномъ) движеніи только по величинѣ, опредѣляетъ въ прямолинейномъ движеніи полное измѣненіе скорости.

Дѣля вторую и третью часть выраженія (47) на Δt, найдемъ:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{CF}{\Delta t} + \frac{FD}{\Delta t}. \tag{48}$$

Остановимся сначала на разсмотрѣніи перваго члена второй части равенства, т. е. того, который заключаетъ въ себѣ векторъ CF, представляющій измѣненіе скорости только по величинѣ. Обозначая его черезъ k_{cp} можемъ написать

$$k_{cp} = \frac{v_{t+\Delta t} - v_t}{\Delta t} = \frac{\Delta v_t}{\Delta t} \;{}^{*)}$$

Слѣдуетъ замѣтить, что представляющаяся намъ теперь задача—нахожденіе ускоренія, которое имѣетъ точка въ данное мгновеніе, какъ фактора, опредѣляющаго собою быстроту измѣненія скорости по величинѣ—, является съ математической стороны тождественной съ вопросомъ объ опредѣленіи скорости точки въ извѣстное мгновеніе по данному разстоянію, съ точки же зрѣнія механической задача эта лишь аналогична упомянутому вопросу. Дѣйствительно, при опредѣленіи скорости намъ нужно было найти величину (v), которая опредѣляла бы собою быстроту измѣненія данной функціи (s) нѣкоторой перемѣнной независимой (t) въ зависимости отъ измѣненій послѣдней.

Мы нашли, что такая величина, представляющая въ свою очередь функцію времени, выражается такъ:

$$v = \text{пр.} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$$

Въ чемъ же состоитъ наша задача теперь при опредѣленіи ускоренія, какъ величины, опредѣляющей собою быстроту измѣненія скорости въ зависимости отъ времени? Такъ какъ скорость есть опять функція времени, принимаемаго за независимую перемѣнную, то намъ предстоитъ дать отвѣтъ на тотъ же по сущности дѣла вопросъ: найти величину (k), которая опредѣляла бы собою быстроту измѣненія данной функціи (v) нѣкоторой перемѣнной независимой (t) въ зависимости отъ измѣненій послѣдней.

Очевидно, и ходъ разсужденій и результатъ ихъ должны остаться поэтому тѣми же самыми; т. е. мы должны обнаружить, что

$$k = \text{пр} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right).$$

*) Здѣсь не ставимъ черточекъ надъ обозначеніями скоростей, такъ какъ онѣ совпадаютъ по направленію и потому геометрическая разность $(\overline{v_{t+\Delta t} - v_t})$ равна алгебраической. Разумѣется постановка черточекъ не будетъ ошибочна, но во всякомъ случаѣ излишня.

Однако, ввиду различия въ механической сторонѣ вопроса, мы вкратцѣ изложимъ ходъ разсужденій, ведущій къ опредѣленію ускоренія k по данной зависимости между скоростью и временемъ.

Если бы разсматриваемое нами движеніе было движеніемъ равно перемѣннымъ, т. е. такимъ, въ которомъ приращенія скорости по величинѣ были бы пропорціональны соотвѣтствующимъ промежуткамъ времени, то отношеніе $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ было бы постояннымъ. Если же движеніе будетъ, вообще говоря, неравноперемѣннымъ, то указанное отношеніе будетъ зависѣть отъ величины промежутка времени Δt подобно тому, какъ это мы имѣли для средней скорости въ перемѣнномъ движеніи (§ 50).

Мы не знаемъ, какъ въ дѣйствительности измѣнялась скорость по величинѣ, но такъ какъ для опредѣленія ускоренія мы поступили подобно тому, какъ это было сдѣлано въ случаѣ движенія равноперемѣннаго, т. е. взяли отношеніе приращенія скорости къ соотвѣтствующему промежутку времени, то мы можемъ сказать, что опредѣленная нами величина k_{cp} будетъ представлять собою ускореніе такого равноперемѣннаго движенія, которое съ нашимъ движеніемъ будетъ имѣть то общее свойство, что приращенія скорости по величинѣ въ одинъ и тотъ же взятый промежутокъ времени Δt равны между собою.

Если бы мы стали брать другія величины для Δt и находили бы для нихъ среднія ускоренія, то значенія ихъ, вообще говоря, отличались бы отъ $\frac{\Delta v}{\Delta t}$. Разница между обѣими величинами подобно тому, какъ мы это имѣли при опредѣленіи скорости въ данное мгновеніе, будетъ постепенно уменьшаться по мѣрѣ уменьшенія промежутка Δt и можетъ быть сдѣлана произвольно малой. Но такъ какъ искомое ускореніе для даннаго мгновенія есть величина постоянная, не зависящая отъ элемента времени Δt, среднее же ускореніе $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ по мѣрѣ уменьшенія Δt, измѣняясь вмѣстѣ съ нимъ, какъ только это было указано, можетъ быть приближено къ ускоренію въ данное мгновеніе какъ угодно близко, то мы заключаемъ, что послѣднее будетъ предѣломъ средняго ускоренія, т. е.

$$k = \text{пр.}\,(k_{cp}) = \text{пр}\left(\frac{v_{t+\Delta t} - v_t}{\Delta t}\right)_{\Delta t=0} = \text{пр}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)_{\Delta t=0} \tag{49}$$

Напомнимъ, что мы говоримъ пока только о той части полнаго ускоренія, которая опредѣляетъ быстроту измѣненія скорости по величинѣ.

Обращаясь къ фиг. 80, на которой

$$CF = \Delta v,$$

$$CG = \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

м найдемъ, что пр. $\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$ представится нѣкоторымъ отрѣзкомъ CG_0, сохраняющимъ прежнее направленіе, т. е. направленіе касательной въ точкѣ A. Ввиду этого разсматриваемую часть полнаго ускоренія, опредѣляющую быстроту измѣненія скорости въ данное мгновеніе по величинѣ, называютъ касательнымъ ускореніемъ. Итакъ мы можемъ сказать, что касательное ускореніе равно предѣлу отношенія алгебрическаго приращенія скорости, т. е. измѣненія ея по величинѣ, къ соотвѣтствующему промежутку времени.

§ 71. Нормальное ускореніе. Полное ускореніе.

Разсмотримъ теперь другую часть средняго ускоренія (ур. 48)

$$\frac{\overline{FD}}{\Delta t},$$

куда входитъ векторъ FD, опредѣляющій измѣненіе скорости по направленію. *Обозначая соотвѣтствующее ускореніе, т. е. ускореніе,* выражающее быстроту измѣненія скорости по направленію для даннаго мгновенія, черезъ n, мы на основаніи всего изложеннаго можемъ заключить, что ускореніе это (составляющее часть полнаго ускоренія въ данное мгновеніе) будетъ выражаться предѣломъ последняго отношенія, т. е.

$$n = \text{пр}\left(\frac{\overline{FD}}{\Delta t}\right)_{\Delta t = 0}$$

Какъ будетъ направлено n?

При уменьшеніи промежутка времени до нуля векторъ BD стремится къ совпаденію съ векторомъ BC; при этомъ уголъ CBD стремится къ нулю. Слѣдовательно, въ равнобедренномъ треугольникѣ FBD каждый изъ прочихъ двухъ угловъ стремится къ прямому; а потому въ предѣлѣ линія FD и совпадающая постоянно съ нею по направленію величина n будетъ нормальна къ скорости v_t или къ касательной къ траекторіи въ точкѣ A и изобразится нѣкоторымъ векторомъ $AN = n$. Ввиду этого разсматриваемой части полнаго ускоренія присваиваютъ названіе нормальнаго ускоренія.

Мы имѣли выше, что среднее полное ускореніе $\left(\frac{\overline{\Delta u}}{\Delta t}\right)$ выражается такъ (ур. 48):

$$\frac{\overline{\Delta u}}{\Delta t} = \frac{\overline{CF}}{\Delta t} + \frac{\overline{FD}}{\Delta t},$$

т. е. оно выражается замыкающей треугольника, построеннаго на величинахъ, стоящихъ въ правой части равенства. Слѣдовательно, и предѣлы всѣхъ этихъ величинъ будутъ составлять на основаніи извѣстной теоремы (§ 65) треугольникъ т. е.

$$\text{пр}\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right) = \text{пр}\left(\frac{CF}{\Delta t}\right) + \text{пр}\left(\frac{FD}{\Delta t}\right)$$

Предѣлы же послѣднихъ двухъ членовъ изображаются векторами AK и AN, а пр.$\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$ — полное ускореніе движенія въ мгновеніе t представится векторомъ $AW = w$, такъ какъ $\bar{w} = \bar{k} + \bar{n}$ *). Въ данномъ случаѣ k и n взаимноперпендикулярны, а потому

$$w = \sqrt{k^2 + n^2} \quad . \quad . \quad (50)$$

При этомъ, какъ видно изъ чертежа, полное ускореніе всегда направлено внутрь кривой.

Расчлененіе полнаго ускоренія w на два составляющихъ — касательное (тангенціальное) и нормальное — удобно въ томъ отношеніи, что каждое изъ нихъ выражаетъ быстроту измѣненія скорости въ одномъ какомъ-либо отношеніи; касательное ускореніе показываетъ быстроту измѣненія скорости по величинѣ, а нормальное — по направленію.

Что касается величинъ этихъ ускореній, то для касательнаго ускоренія мы уже имѣли.

$$k = \text{пр}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) \quad (51)$$

гдѣ Δv — алгебраическая разность между скоростями $v_{t+\Delta t}$ и v_t, что ясно и изъ самаго опредѣленія этого ускоренія. Величину нормальнаго ускоренія найдемъ такъ (фиг. 80а): изъ равнобедреннаго треугольника BFD, опустивъ перпендикуляръ изъ точки B на FD, и обозначая уголъ FBD черезъ $\Delta\varphi$, получаемъ.

$$FD = 2v_{t+\Delta t} \sin\frac{\Delta\varphi}{2}$$

Дѣля все выраженіе на Δt и беря предѣлъ, имѣемъ

$$n = \text{пр}\left(\frac{FD}{\Delta t}\right) = \text{пр}\left(\frac{2v_{t+\Delta t}\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t}\right)$$

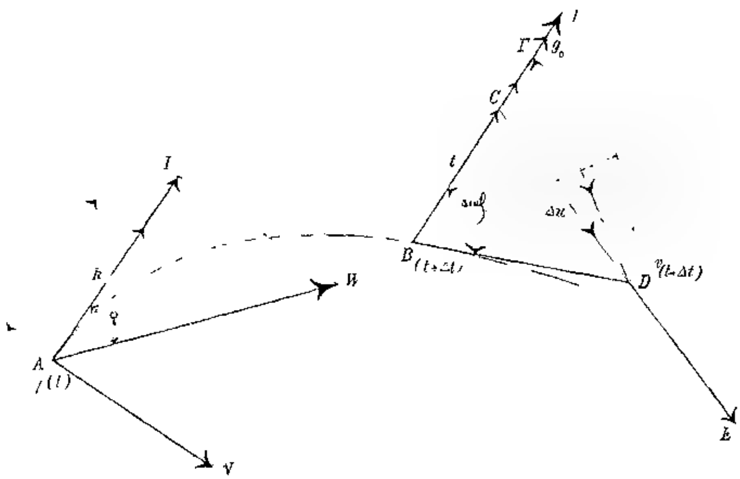
*) Не удерживаемъ для обозначенія ускоренія буквы a (accelleratio—ускореніе), во-первыхъ потому, что буква эта очень часто встрѣчается какъ коефиціентъ, а во-вторыхъ потому, что начальныя буквы алфавита употребляются обыкновенно для обозначенія постоянныхъ, а не перемѣнныхъ количествъ.

Преобразуя, находимъ

$$\text{пр}\left(\frac{2e_{(t+\Delta t)}\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t}\right)=\text{пр}\left(e_{(t+\Delta t)}\frac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t}\right)=$$

$$\text{пр}.\,e_{(t+\Delta t)}\cdot\text{пр}\left(\frac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t}\right)=e\cdot\text{пр}\left(\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\cdot\frac{2\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t}\right)=$$

$$=e\cdot\text{пр}.\left(\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\right)\cdot\text{пр}\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right) \qquad (5)$$



80

Опредѣлимъ значенія обоихъ предѣловъ. Первый изъ нихъ, т. е.

$$\text{пр}\left(\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\right)$$

при уменьшеніи угла φ до нуля равенъ единицѣ. Докажемъ это положеніе.

§ 72. Предѣлъ отношенія синуса элементарной дуги къ самой дугѣ при уменьшеніи дуги до нуля.

Изъ фиг. 81, гдѣ AB есть элементарная дуга, соотвѣтствующая углу $\Delta\varphi$, имѣемъ:

$$\breve{AB} < AD,$$

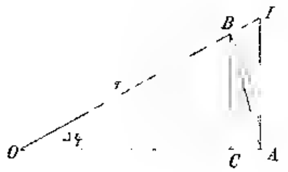
что легко можетъ быть усмотрѣно изъ соотношенія между площадями треугольника OAD и сектора OAB, причемъ послѣдняя меньше первой. Но линія BC въ свою очередь меньше хорды AB, а потому имѣемъ

$$BC < AB < \breve{AB}$$

слѣдовательно

$$BC < \breve{AB} < AD.$$

Дѣля всѣ члены на радіусъ r, получимъ:



81

$$\frac{BC}{r} < \frac{\breve{AB}}{r} < \frac{AD}{r}$$

или

$$\sin\Delta\varphi < \Delta\varphi < tg\,\Delta\varphi$$

Дѣля первую и вторую часть на уголъ $\Delta\varphi$, найдемъ

$$\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi} < 1$$

А такъ какъ

$$\Delta\varphi < tg\,\Delta\varphi$$

или

$$\Delta\varphi < \frac{\sin\Delta\varphi}{\cos\Delta\varphi},$$

откуда

$$\cos\Delta\varphi < \frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi}$$

то

$$\cos\Delta\varphi < \frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi} < 1$$

Но при уменьшеніи $\Delta\varphi$ до нуля $\cos\Delta\varphi$ стремится къ 1, а потому и $\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi}$ также стремится къ единицѣ, т. е.

$$\text{пр}\left(\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi}\right)_{\Delta\varphi=0} = 1. \qquad (53)$$

Перейдемъ теперь къ опредѣленію второго изъ имѣющихся предѣловъ.

§ 73. Предѣлъ отношенія элементарнаго угла къ соотвѣтствующему промежутку времени.

Разсмотримъ первоначально чему равняется

$$\text{пр}\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right)_{\Delta t=0}$$

въ случаѣ кругового движенія (фиг. 87). Изъ чертежа имѣемъ

$$r \cdot \Delta\varphi = \Delta s$$

откуда

$$\Delta\varphi = \Delta s \cdot \frac{1}{r}$$

Дѣля обѣ части на Δt

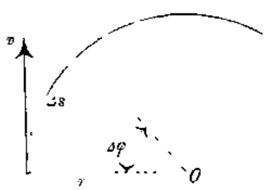
$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{1}{r}$$

и беря предѣлъ окончательно получаемъ

$$\text{пр}\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right) = \text{пр.}\ \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \text{пр}\ \frac{1}{r} = v \cdot \frac{1}{r}. \qquad (54)$$

Разсмотримъ теперь движеніе по произвольной траекторіи. Вообразимъ въ точкѣ траекторіи, опредѣляемой мгновеніемъ t, кругъ кривизны (§ 60), тогда для него имѣемъ:

$$\text{пр}\left(\frac{\Delta\varphi_1}{\Delta s_1}\right) = \frac{1}{r}$$



92

гдѣ $\Delta\varphi_1$ — элементарный уголъ.

Δs_1 — элементарная дуга круга.

r — радіусъ кривизны въ точкѣ A.

На основаніи выраженія (35) пишемъ

$$\text{пр}\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right) = \text{пр}\left(\frac{\Delta\varphi_1}{\Delta s_1}\right) = \frac{1}{r}$$

Въ такомъ случаѣ

$$\text{пр}\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right) = \text{пр.}\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \text{пр}\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right) \cdot \text{пр}\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) =$$

$$= \frac{1}{r} \cdot v = \frac{v}{r}$$

Итакъ

$$\text{пр}\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right) = \frac{v}{r}$$

Какъ видимъ, выраженіе это одинаково съ найденнымъ для круговой траекторіи (54).

§ 74. Продолженіе § 71

Итакъ мы нашли

$$\text{пр}\left(\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\right) = 1$$

$$\text{пр}\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right) = \frac{v}{r}$$

Вставляя величины эти въ выраженіе (52) для нормальнаго ускоренія

$$n = v \lim\left(\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\right) \lim\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right)$$

получимъ

$$n = \frac{v^2}{r}.$$

Такъ какъ нормальное ускореніе совпадаетъ съ радіусомъ кривизны и направлено къ центру кривизны (фиг. 80а), то его называютъ также **центростремительнымъ ускореніемъ**.

Итакъ для ускореній въ произвольномъ движеніи получили слѣдующія выраженія:

касательное ускореніе

$$l = \lim\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) \qquad (55)$$

нормальное ускореніе

$$n = \frac{v^2}{r}, \qquad (56)$$

полное ускореніе

$$= \sqrt{l^2 + n^2} = \sqrt{\left[\lim\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)\right]^2 + \left[\frac{v^2}{r}\right]^2} \qquad (57)$$

Направленія касательнаго и нормальнаго ускореній опредѣляются самыми названіями ихъ.

Что касается величинъ единицъ для измѣренія ускоренія, то принимая за основныя единицу длины — сантиметръ и единицу времени — секунду, за единицу касательнаго ускоренія мы можемъ принять ускореніе такого равноускореннаго прямолинейнаго движенія (скорость измѣняется только по величинѣ), въ которомъ скорость въ секунду увеличивается на одинъ сантиметръ, дѣленный на секунду.

Единицей же нормальнаго ускоренія можетъ служить ускореніе такого равномѣрнаго круговаго движенія (скорость измѣняется только по направленію и при томъ пропорціонально времени), въ которомъ точка находясь отъ центра на разстояніи одного сантиметра, проходитъ въ секунду дугу, равную одному сантиметру; дѣйствительно при $v = 1$ и $r = 1$ мы получимъ $n = 1$.

Не трудно убѣдиться, что нормальное ускореніе имѣетъ то же измѣреніе какъ и ускореніе касательное. Въ самомъ дѣлѣ,

$$\text{измѣр. } n = \frac{(\text{измѣр. } v)^2}{\text{измѣр. } r} = \frac{(LT^{-1})^2}{L} = \frac{L^2T^{-2}}{L} = LT^{-2}$$

Употребляя обозначенія диференціальнаго исчисленія, будемъ имѣть

$$l = \frac{dv}{dt},$$

и такъ какъ

$$v = \frac{ds}{dt},$$

то

$$k = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

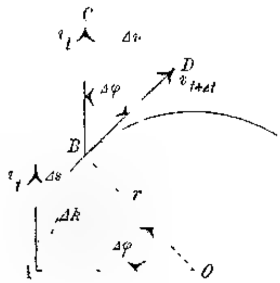
Далѣе

$$n = \frac{v^2}{r}$$

$$a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2}.$$

§ 75. Нормальное ускореніе въ круговомъ движеніи.

Нахожденіе величины нормальнаго ускоренія въ общемъ случаѣ движенія по произвольной траекторіи требуетъ, какъ мы видѣли, нѣкоторыхъ дополнительныхъ свѣдѣній по геометріи, каковы понятія о радіусѣ и кругѣ кривизны и т. д. Въ простѣйшемъ случаѣ кругового равномѣрнаго движенія величина нормальнаго ускоренія можетъ быть найдена болѣе простымъ путемъ, а именно (фиг. 83): проведемъ изъ точки B векторъ BC, равный v_t. Онъ образуетъ съ равною ему по величинѣ скоростью $v_{t+\Delta t}$ уголъ $\Delta\varphi$.



83

Изъ подобія треугольниковъ ABO и BCD имѣемъ

$$\frac{CD}{BC} = \frac{AB}{AO}$$

или

$$\frac{\Delta n}{v_t} = \frac{\Delta k}{r},$$

откуда

$$\Delta n = \frac{v_t}{r}\,\Delta k.$$

Дѣля на Δt и беря предѣлъ, найдемъ

$$\text{пр}\,\frac{\Delta n}{\Delta t} = n = \text{пр}\,\frac{v}{r}\;\text{пр}\,\frac{\Delta k}{\Delta t} = \frac{v}{r}\cdot v$$

$$n = \frac{v^2}{r} \qquad (56)$$

§ 76. Ускореніе въ частныхъ видахъ движеній.

1. Дано:

$$n = \frac{v^2}{r} = 0$$

что можетъ быть въ двухъ случаяхъ или тогда, когда $v = 0$ — точка находится въ покоѣ — или когда $r = \infty$ т. е. траекторія прямая. Въ такомъ случаѣ

$$w = k,$$

т. е. полное ускореніе равно касательному; такимъ образомъ скорость точки измѣняется только по величинѣ.

2.
$$k = \text{пр.}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = 0$$

Въ данномъ случаѣ $\Delta v = v_{t+\Delta t} - v_t = 0$; скорость по величинѣ не измѣняется. Движеніе равномѣрное. При этомъ

$$w = n.$$

3. $r = \infty$, $k = 0$ слѣдов. и $w = 0$

Движеніе прямолинейное и равномѣрное.

4.
$$k = \text{пр}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = Const. \text{ (постоянной величинѣ).}$$

Тогда

$$\text{пр}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = \frac{\Delta v}{\Delta t} = Const.$$

Скорость измѣняется пропорціонально времени, движеніе равно перемѣнное: если $\frac{\Delta v}{\Delta t} > 0$, то равноускоренное; если же $\frac{\Delta v}{\Delta t} < 0$, то движеніе равнозамедленное.

5. $n = Const.$, $k = 0$

слѣдовательно $v = Const.$, а потому и

$$r = \frac{v^2}{n} = Const$$

Имѣемъ случай кругового равномѣрнаго движенія.

§ 77. Опредѣленіе касательнаго ускоренія графически.

Если законъ разстояній заданъ графически и требуется найти величину касательнаго ускоренія (или полнаго ускоренія, если движеніе будетъ прямолинейнымъ) въ мгновеніе t, то предварительно строимъ по извѣстному пріему кривую скоростей, т. е. кривую, выражающую зависимость между скоростью и временемъ (§ 54). Кривая ускореній строится совершенно подобнымъ же образомъ, какъ это можно видѣть изъ слѣдующаго примѣра.

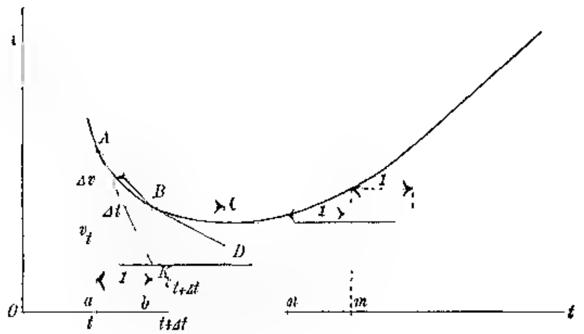
Пусть имѣемъ скорость въ зависимости отъ времени заданной кривой, представленной на фиг. 84. Возьмемъ мгновеніе t; скорость движенія измѣряется ординатою aA. Проведемъ сѣкущую черезъ точки $A(t)$ и $B(t + \Delta t)$; тогда среднее касательное ускореніе для времени

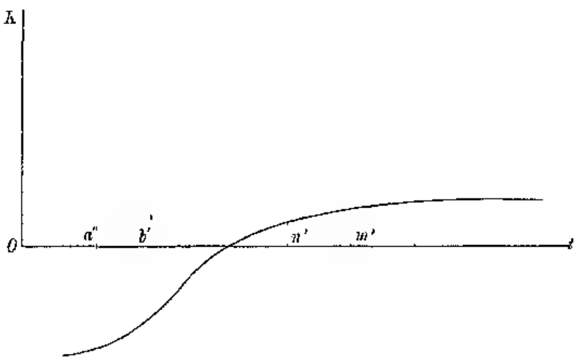
Δt будетъ равно

$$k_{cp} = \frac{v_{t+\Delta t} - v_t}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = tg\,ABC$$

Желая найти дѣйствительную величину касательнаго ускоренія въ мгновеніе t, будемъ уменьшать Δt; сѣкущая AB будетъ при этомъ

84





85

приближаться къ касательной съ которой и сольется когда Δt положимъ равнымъ нулю

Слѣдовательно

$$k = \text{пр}\ (k_{cp}) = \text{пр.}\ \frac{\Delta v}{\Delta t} = tg\,AKD$$

т. е. касательное ускореніе по численной величинѣ выражается численнымъ тангенсомъ угла, образуемаго касательной къ кривой скоростей въ точкѣ, соотвѣтствующей данному мгновенію, съ осью временъ. Опредѣляя величину этихъ тангенсовъ для различныхъ точекъ кривой и откладывая ихъ соотвѣтственно вверхъ или внизъ по оси k (фиг. 85), мы будемъ имѣть рядъ точекъ, опредѣляющихъ величины ускореній; проведя черезъ нихъ кривую, мы и получимъ графическую зависимость касательнаго ускоренія отъ времени. Не останавливаемся болѣе подробно на этомъ вопросѣ, такъ какъ всѣ соображенія, касающіяся построенія кривой скоростей по данной кривой разстояній (§ 54) имѣютъ непосредственное приложеніе и въ настоящемъ случаѣ. Обратимъ здѣсь вниманіе лишь на то, что точки, для которыхъ производится построеніе ускореній, должны быть выбираемы въ каждомъ частномъ случаѣ такъ, чтобы видъ выстраиваемой кривой опредѣлился съ необходимой точностью на всемъ протяженіи линіи.

§ 78. О наибольшихъ и наименьшихъ величинахъ разстояній.

Выше въ § 55 мы говорили о наибольшихъ и наименьшихъ значеніяхъ разстояній, при чемъ было показано, что при такихъ значеніяхъ скорость обращается въ нуль. Касательное ускореніе позволяетъ указать, когда мы будемъ имѣть наибольшее значеніе для разстоянія, когда наименьшее *).

Дѣйствительно, если s будетъ имѣть наибольшую величину, то кривая скоростей имѣетъ такое направленіе, что касательныя проведенныя къ ней около высшаго мгновенія образуютъ съ осью временъ тупые углы **), а, слѣдовательно, ускореніе будетъ отрицательнымъ и наоборотъ. Такимъ образомъ если для какого либо мгновенія скорость равна нулю, а касательное ускореніе будетъ меньше нуля, то разстояніе будетъ имѣть наибольшее значеніе; при скорости же равной нулю и положительномъ касательномъ ускореніи разстояніе будетъ наименьшимъ.

Распространяя только что сказанное на произвольныя непрерывно измѣняющіяся функціи, изъ самой сущности дѣла придемъ къ слѣдующимъ выводамъ: при наибольшихъ или наименьшихъ значеніяхъ функцій величина, показывающая быстроту измѣненія функціи съ измѣненіемъ перемѣнной независимой, т. е. производная функція по перемѣнной независимой должна равняться нулю, такъ какъ разсматриваемое мгновеніе (значеніе перемѣнной) служитъ границей между увеличеніемъ функціи съ увеличеніемъ независимой перемѣнной (производная до этого момента положительна) и уменьшеніемъ функціи съ продолжающимся увеличеніемъ независимой перемѣнной (производная отрицательна).

Если затѣмъ вторая производная (соотвѣтствующая касательному ускоренію въ случаѣ движенія) будетъ отрицательной, то функція имѣетъ наибольшее значеніе; въ обратномъ случаѣ наименьшее.

Пріемъ высшей математики, посредствомъ котораго отыскиваютъ максимумъ и минимумъ данной функціи, подобный изложенному, состоитъ въ слѣдующемъ: находятъ первую производную функціи, приравниваютъ ее нулю и

*) Выраженія «наибольшій» и «наименьшій» разумѣются не въ абсолютномъ, а въ алгебраическомъ смыслѣ, такъ напр. $-3 > -6$.

**) Ординаты кривой скоростей уменьшаются до нуля, а затѣмъ будучи отрицательными, возрастаютъ по абсолютной величинѣ.

опредѣляютъ значеніе перемѣнной независимой. Берутъ затѣмъ вторую производную, вводятъ въ нее вычисленное значеніе перемѣнной независимой и если полученная величина будетъ больше нуля, то функція при найденномъ значеніи независимой имѣетъ минимумъ, въ обратномъ случаѣ максимумъ.

Если бы вторая производная была нулемъ, то обращаются къ дальнѣйшимъ производнымъ, причемъ въ случаѣ наибольшаго или наименьшаго значенія функціи первая необращающаяся въ нуль производная должна быть четнаго порядка (вторая, четвертая и т. д.

§ 79. Равноперемѣнное движеніе.

Ознакомимся болѣе подробно съ зависимостью разстоянія отъ времени, выраженною уравненіемъ второй степени относительно t.

$$s = a + bt + ct^2. \tag{58}$$

Мы будемъ имѣть въ этомъ случаѣ движеніе равноперемѣнное. Дѣйствительно опредѣляя послѣдовательно v и k найдемъ:

$$v = b + 2ct.$$
$$k = 2c = Const.$$

Опредѣлимъ механическое значеніе постоянныхъ величинъ a, b и c. Полагая въ уравненіи (58) t равнымъ нулю, получимъ $s_0 = a$. Подобнымъ же образомъ изъ выраженія скорости найдемъ $v_0 = b$. Что касается c, то оно равно половинѣ касательнаго ускоренія. Вставляя эти значенія въ формулы для разстоянія и скорости будемъ имѣть.

$$\left.\begin{aligned} s &= s_0 + v_0 t + \frac{kt^2}{2} \\ v &= v_0 + kt \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Эти уравненія и могутъ служить для рѣшенія всевозможныхъ вопросовъ, относящихся къ равноперемѣнному движенію. Въ нихъ входятъ слѣдующія величины: s, s_0, v, v_0, k и t, если четыре будутъ даны, то остальныя двѣ могутъ быть опредѣлены. Помня эти уравненія весьма нетрудно простой подстановкой найти неизвѣстныя величины и при томъ всегда можно опредѣлить, достаточно ли данныхъ имѣется для рѣшенія предлагаемаго вопроса.

Въ частномъ случаѣ, если $s_0 = 0$ получимъ:

$$\left.\begin{aligned} s &= v_0 t + \frac{kt^2}{2} \\ v &= v_0 + kt \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Если кромѣ того и v_0 будетъ равно нулю, то

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{kt^2}{2} \\ v &= kt \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Всѣ указанныя уравненія пригодны для произвольной траекторіи (k — касательное ускореніе). Если же траекторія будетъ прямолинейной, то касательное ускореніе k равно полному ускоренію w и потому можемъ написать.

$$\left.\begin{aligned} s &= s_0 + v_0 t + \frac{wt^2}{2} \\ v &= v_0 + wt \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

§ 80. Задачи *).

1. Тѣло, двигаясь равноускоренно въ 5 мин. прошло разстояніе въ 900 метр. Найти ускореніе.

2. Рѣшить предыдущую задачу отдѣльно при каждомъ изъ слѣдующихъ предположеній. а) до начала временъ тѣломъ пройдено разстояніе въ 300 м.; б) тѣло имѣло начальную скорость 10 м./сек.

3. Движущееся тѣло имѣетъ скорость въ 30 м. сек.; тремя секундами раньше скорость была 6 м./сек. Какъ велико ускореніе тѣла?

4. Тѣло, двигаясь съ ускореніемъ 2 м./сек.², прошло разстояніе въ 48 м. Найти время, которое на это потребовалось.

5. Каково ускореніе тѣла, которое въ теченіе 6 сек. проходитъ 45 метр., имѣя начальную скорость въ 2 м. сек.?

6. Найти ускореніе снаряда, съ которымъ онъ двигался въ каналѣ орудія длиною 4 м., если у дула онъ имѣлъ скорость 480 м./сек.

7. Найти ускореніе тѣла, скорость котораго въ теченіе минуты возросла съ 3 до 123 м. сек.

8. Желѣзнодорожный поѣздъ, имѣющій скорость 46,8 км. въ часъ тормозится такъ, что скорость его въ каждую секунду убываетъ на 2 м./сек. Какова будетъ его скорость (часовая) по истеченіи 6 сек.?

9. Какой путь пройдетъ этотъ поѣздъ до момента остановки?

10. Поѣздъ, идущій со скоростью 30 верстъ въ часъ, заторможенъ и остановленъ на разстояніи въ 300 саж. при чемъ равномѣрно уменьшалъ свою скорость. Найти ускореніе.

11. Найти ускореніе прямолинейнаго равноперемѣннаго движенія въ которомъ тѣло прошло 480 м., при чемъ конечная скорость равнялась 2 м. сек., а начальная 10 м./сек.; б) найти время въ теченіе котораго тѣло проходитъ 200 м.

12. Дано $$s = f(t)$$

Можетъ ли быть найдено полное ускореніе въ круговомъ движеніи?

13. Показать, что ускореніе въ прямолинейномъ движеніи при

$$s = 2t - 6t,$$

есть величина постоянная.

*) Если не сдѣлано особыхъ оговорокъ, то движеніе предполагается равноперемѣннымъ и прямолинейнымъ.

14. Дано: $s = 2t^2$.

Какой видъ должна имѣть траекторія, чтобы полное ускореніе было по величинѣ постояннымъ?

15. Точка описываетъ кругъ радіусомъ въ 10 метр., при чемъ разстояніе, ею проходимое, выражается такъ:

$$s = 2 - t + 2t^2$$

Найти касательное, нормальное и полное ускоренія ея движенія въ концѣ третьей секунды?

16. Во сколько разъ измѣнится численная величина единицы ускоренія въ слѣдующихъ случаяхъ:

а) единица длины увеличена въ 10 разъ;

б) за единицу длины вмѣсто метра взять футъ;

в) за единицу времени вмѣсто секунды взята минута?

17. Ускореніе движенія (полное) равно нулю. Показать, что движеніе будетъ прямолинейнымъ и равномѣрнымъ.

18. Нормальное ускореніе постоянно и равно 2. Касательное $= 0$. Что можно сказать о самомъ движеніи.

19. Найти радіусъ круга при данныхъ предыдущей задачи, если скорость движущейся точки равна 6 м.

20. Найти нормальное ускореніе при данныхъ задачи № 10 въ начальный моментъ торможенія въ томъ случаѣ, если остановка произошла на дугѣ круга радіуса 200°.

21. Тѣло движется равномѣрно по окружности со скоростью 1 фут./сек., причемъ проходитъ полную окружность въ 10 сек. Найти величину и направленіе средняго ускоренія, при прохожденіи тѣломъ а) первой четверти окружности и б) первой половины окружности.

22. Найти нормальное ускореніе точки на экваторѣ, руководствуясь слѣдующими приблизительными данными: радіусъ земли — 6.400 км., время полнаго оборота — 24 часа.

23. Зависимость разстоянія отъ времени для точки, движущейся по кругу съ радіусомъ r, дана уравненіемъ $s = at^3$. Найти:

$$a) \quad k = \varphi_1(t)$$

$$b) \quad \iota = \varphi_2(t)$$

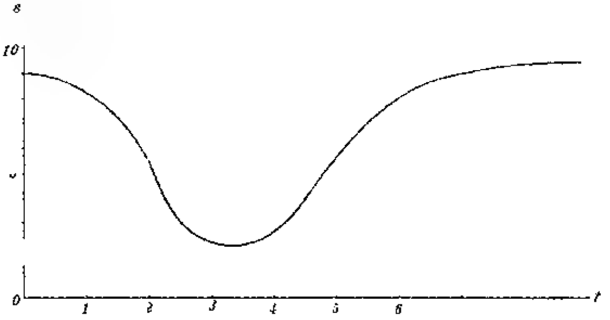
$$c) \quad w = f(t)$$

24. Зависимость разстоянія отъ времени дана кривой (фиг. 86). Построить соотвѣтствующія кривыя скоростей и ускореній.

25. Построить кривую касательныхъ ускореній по данной кривой скоростей (фиг. 87).

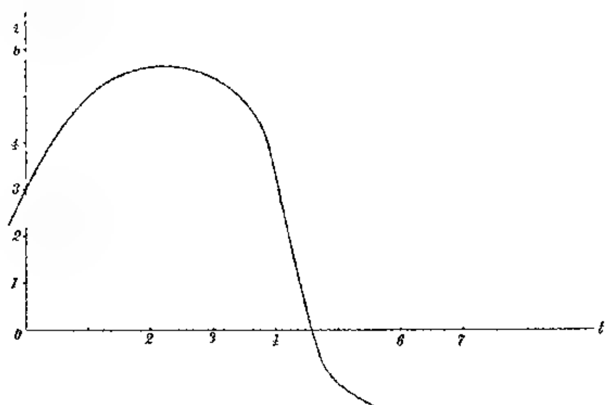
26. Начертить кривую, выражающую зависимость между скоростью и проходимымъ поѣздомъ путемъ, пользуясь данными задачи № 10.

27. Скорость движенія уменьшается пропорціонально времени. Какой видъ будетъ имѣть кривая, выражающая зависимость касательнаго ускоренія отъ времени?



86

28. Кривая разстояній имѣетъ точку перегиба: чему равно въ этотъ моментъ касательное ускореніе? *)



87

29. Какое обобщеніе можетъ быть внесено въ заданіе предыдущаго примѣра, если траекторія прямая?

30. Зависимость разстоянія отъ времени въ прямолинейномъ дви

*) О точкѣ перегиба см. выше § 56.

женія дана уравненіемъ $s = 2 + t^2 - t$. Построить кривую разстояній и соотвѣтствующія кривыя скоростей и ускореній.

31. Начертить кривую разстояній, скоростей и ускореній, руководствуясь данными задачи № 10.

Примѣчаніе. Обратить вниманіе на выборъ масштабовъ.

32. Дано: $s = \sin t$.

Построить кривыя скоростей и ускореній.

33. Зависимость разстоянія отъ времени дана уравненіемъ

$$s = t^3 - 12t.$$

Опредѣлить когда тѣло будетъ находиться на наибольшемъ удаленіи отъ начала разстояній.

34. Даны зависимости разстояній отъ времени

$$\text{а)}\quad s = t + 8 - 2t^3 \qquad \text{б)}\quad s = 4t - t^2.$$

Требуется опредѣлить въ какое мгновеніе разстояніе точки отъ начала разстояній будетъ наибольшимъ или наименьшимъ.

Рѣшенія задачъ

1. $s = \frac{kt^2}{2}$, гдѣ $s = 900$ м, $t = 5 \cdot 60 = 300$ сек. Искомое ускореніе $k = 0{,}02$ м/сек^2.

2. а) $s = \frac{kt^2}{2}$, гдѣ $s = 300$, $k = 0{,}0133$ м/сек^2.

б) $s = v_0 t + \frac{kt^2}{2}$, гдѣ $v_0 = 10$, $k = 0{,}06$ м/сек^2.

3. $v = v_0 + kt$, гдѣ $v = 30$, $v_0 = 6$, $t = 3$; $k = 8$ м/сек^2.

4. $s = \frac{kt^2}{2}$, гдѣ $s = 48$, $t = 6$, $k = 2{,}66$.

5. $k = 2$.

6. $k = 28800$ м/сек.

7. $k = 2$ м/сек^2.

8. 3,6 км/час.

9. 42,25 м.

10. 104,26 саж. сек.^{2}.

11. а) $k = 0{,}1$; б) $t = 2$ мин. 57,5 сек.

12. Нѣтъ, такъ какъ для опредѣленія полнаго ускоренія (w) нужно знать нормальное ускореніе (n), зависящее отъ радіуса круга.

13. Опредѣляемъ скорость и ускореніе, пользуясь формулами:

$$v = \text{пр.}\frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{и} \quad k = \text{пр.}\frac{\Delta v}{\Delta t},$$

откуда находимъ $k = -12$.

14. Касательное ускореніе $k = 4$. Чтобы полное ускореніе было постояннымъ, нормальное ускореніе $n = \frac{v^2}{r}$ должно быть постояннымъ

т. е. $n = \frac{(4t)^2}{r} = C$, слѣдовательно радiусъ кривизны траекторiи долженъ рости пропорцiонально t^2

15. $v = 4t^2 - 1$, $k = 4$, $n_3 = 12,1$; $w = 12,7$.

16. а) Ускоренiе численно уменьшится въ 10 разъ

б) Ускоренiе численно увеличится въ 3,28 разъ

в) Ускоренiе численно увеличится въ 60^2 разъ.

17. Если полное ускоренiе $w = 0$, то слѣд. равны въ отдѣльности нулю k и n; но $k = 0$, когда $v = Const$, а $n = 0$, если $v >< 0$, но не равна нулю въ томъ случаѣ, когда $r = \infty$ т. е. траекторiя прямая

18. См § 76.

19. $r = 18$ м

20. $n = \frac{v^2}{r}$, гдѣ $v = \frac{46800}{3600} = 13$ м. сек

21. Здѣсь есть только постоянное по величинѣ нормальное ускоренiе, равное $\frac{v^2}{r} = \frac{4^2}{6,34} = 2,52$ м./сек.^{2}

22. $n = 0,034$ м./сек.^{2}.

23. $v = 3at^2$; $k = 6at$; $n = \frac{9a^2t^4}{r}$.

24. См. §§ 54 и 77

25. См § 77

26. Найдя $v = \varphi(s)$ строимъ ее по точкамъ

27. Прямая

28. $k = 0$.

28. Полное ускоренiе равно нулю

30. См. §§ 54 и 77.

31. Найдя $v = \varphi_1(t)$ и $k = \varphi_2(t)$, строимъ ихъ по точкамъ

32. См. § 56. задача 13.

33. Приравниваемъ выраженiе скорости (первой производной) $v = 3t^2 - 12$ нулю и находимъ изъ него $t = \pm 2$. Подставляя эту величину въ уравненiе разстоянiй, получимъ ∓ 16.

Ускоренiя (вторая производная) $k = 4t$ будутъ соотвѣтственно $t = \pm 2$ имѣть слѣдующiя значенiя: $+8$ и -8. Слѣдовательно $s = -16$ представитъ наибольшеее удаленiе точки въ направленiи отрицательныхъ разстоянiй, а $+16$ то же для положительныхъ разстоянiй. Сказанное не трудно усмотрѣть непосредственно на чертежѣ.

34. См. предыдущую задачу

а) s наиб. при $t = \frac{1}{3}$, s наим. при $t = 0$

б) s наиб. при $t = 2$

§ 81. Угловое ускоренiе

Если точка движется по кругу, то скорость ея v выражается въ зависимости отъ радiуса круга r и угловой скорости ω, согласно вы веденному въ §§ 59 и 61 слѣдующимъ образомъ

$$v = r\omega.$$

Воспользуемся этимъ выраженіемъ для опредѣленія касательнаго и нормальнаго ускореній — k и n. Мы получимъ

$$k = \text{пр.}\ \frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{пр.}\ \frac{\Delta[r\omega]}{\Delta t} = \text{пр.}\ \frac{r\,.\,\Delta\omega}{\Delta t} = r\ \text{пр.}\ \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad (63)$$

$$n = \frac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2 \qquad (64)$$

Если въ выраженіи для k положимъ $r = 1$, то

$$(k)_{r=1} = \text{пр.}\ \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Мы получимъ величину касательнаго ускоренія для точки, движущейся по кругу, радіусъ котораго равенъ единицѣ. Такое ускореніе соотвѣтственно угловой скорости называютъ угловымъ ускореніемъ; обозначая его буквою i будемъ имѣть

$$i = \text{пр.}\ \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad (65)$$

Измѣреніе единицы углового ускоренія будетъ таково

$$\text{Измѣр.}\ i = \frac{\text{измѣр.}\ \omega}{\text{измѣр.}\ t} = \frac{T^{-1}}{T} = T^{-2}$$

т. е. равно единицѣ, дѣленной на квадратъ секунды.

Полное ускореніе точки w въ данное мгновеніе представится при помощи углового ускоренія и угловой скорости въ слѣдующемъ видѣ:

$$w = \sqrt{k^2 + n^2} = \sqrt{(ri)^2 + (r\omega^2)^2} = r\sqrt{i^2 + \omega^4} \qquad (66)$$

Формула эта показываетъ, что для опредѣленія ускоренія w должны быть извѣстны: радіусъ кривизны (въ частномъ случаѣ кругового движенія — радіусъ круга) — r и угловая скорость ω.

Не трудно найти, подобно изложенному выше (§ 76), какъ выразится ускореніе w въ частныхъ случаяхъ движенія въ зависимости отъ i и ω.

Опредѣлимъ соотношенія, существующія между угломъ, соотвѣтствующимъ дугѣ пройденной движущейся точкою, угловой скоростью и угловымъ ускореніемъ въ случаѣ равноперемѣннаго движенія. Въ выраженіяхъ

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{kt^2}{2}$$

$$v = v_0 + kt$$

имѣя въ виду круговое движеніе, можемъ сдѣлать слѣдующую замѣну, сохраняя принятыя выше обозначенія

$$s = r\varphi, \quad s_0 = r\varphi_0$$

$$v = r\omega, \quad v_0 = r\omega_0,$$

$$j = ri.$$

При этомъ получимъ

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{it^2}{2} \\ \omega &= \omega_0 + it \end{aligned}\right\} \qquad (67)$$

Примѣненіемъ этихъ и приведенныхъ выше (§ 79) формулъ и рѣшаются всѣ вопросы, относящіеся къ круговому равнопеременному движенію.

§ 82. Задачи.

1. Колесо діаметромъ 0,6 м. дѣлаетъ 36 обор. въ мин. Каково будетъ ускореніе точекъ на ободѣ его, если въ теченіе 6 сек. число оборотовъ равномѣрно возрастетъ до 54 въ мин.

2. Колесо дѣлаетъ 200 оборотовъ въ часъ. Выразить угловую скорость его: а) въ угловыхъ единицахъ (радіанахъ) въ сек.; б) въ градусахъ въ минуту.

3. При равноускоренномъ вращеніи точки начальная угловая скорость ея равна 5, а черезъ 5 мин. 20.

а) Найти число оборотовъ, которое совершила при этомъ точка.

б) Найти угловое ускореніе.

4. Тормазное колесо діаметромъ 1,25 м. дѣлаетъ 24 оборота въ минуту, при нажатіи тормаза колесо вращается съ замедленіемъ въ 0,0314 м.

а) Сколько оборотовъ сдѣлаетъ колесо до момента остановки?

б) Въ теченіе какого времени произойдетъ остановка?

Рѣшенія задачъ.

1. Скорость въ началѣ 1-й сек.—1,21 м./сек., въ концѣ 6 сек.—1,81 м./сек.; ускореніе $\frac{0,6}{6} = 0,1$ м./сек.^{2}

2. а) $\frac{\pi}{9}$, б) 1200

3. а) $i = 0,05$, $\varphi = \omega_0 t + \frac{it^2}{2} = 5 \cdot 300 + \frac{0,05 \cdot 300^2}{2} = 3750$; $n = \frac{3750}{2\pi} = \infty\, 597$ обор.

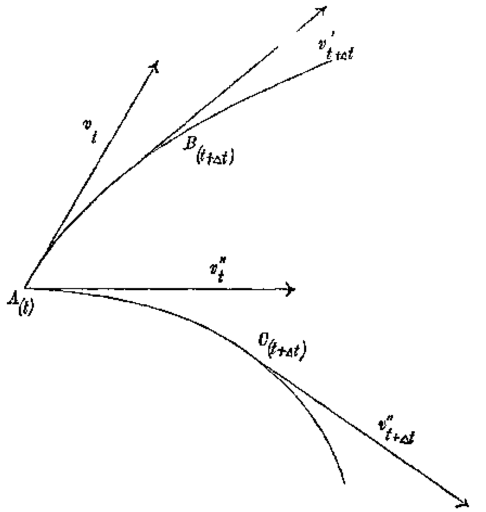
4. а) 10 обор., б) 50 сек.

ГЛАВА VI

Сложенiе ускоренiй

§ 83. Общее правило сложенiя ускоренiй.

Мы уже касались въ предыдущей главѣ вопроса о сложенiи ускоренiй; дѣйствительно было показано (§ 71), что полное ускоренiе есть геометрическая сумма ускоренiя касательнаго и нормальнаго. Поэтому первое можетъ быть названо составнымъ ускоренiемъ, по-



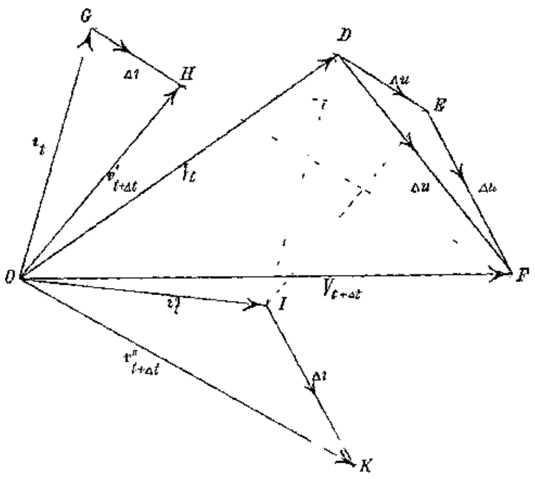
88

слѣднiя -составляющими его. Разсмотримъ теперь вопросъ въ болѣе общемъ видѣ; постараемся найти дѣйствительное ускоренiе движущейся точки,—составное, если даны ускоренiя двухъ составляющихъ движенiй точки, короче—составляющiя ускоренiя предполагая переносное движенiе точки поступательнымъ (§ 37). На фиг. 88 кривыя AB и AC суть траекторiи двухъ движенiй точки.

Построимъ скорости ихъ для мгновенiя t v'_t и v''_t и мгновенiя $t+\Delta t$ — $v'_{t+\Delta t}$ и $v''_{t+\Delta t}$. Найдемъ скорость составного движенiя въ то и другое мгновеніе. Возьмемъ произвольную точку 0 (фиг. 89), проведемъ линіи паралельныя и равныя указаннымъ скоростямъ. Тогда діагональ OD паралелограма, построеннаго на скоростяхъ v'_t и v''_t дастъ скорость составного движенія V_t; такимъ же образомъ діагональ OF представляетъ скорость

$$\overline{V}_{t+\Delta t}=\overline{v}'_{t+\Delta t}+\overline{v}''_{t+\Delta t}$$

Покажемъ теперь, что пріобрѣтенная скорость составного движенія ΔU въ теченіе промежутка времени Δt есть геометрическая сумма



89

пріобрѣтенныхъ скоростей движеній составляющихъ $\Delta u'$ и $\Delta u''$ т. е.

$$\Delta U=\overline{\Delta u'}+\overline{\Delta u''}.$$

Пріобрѣтенная скорость движенія по AB есть $\Delta u'=GH$ движенія по AC — $\Delta u''=IK$, движенія составного $\Delta U=DF$. Направленія ихъ указаны стрѣлками.

Проведемъ изъ точки D линію DE, равную и параллельную $\Delta u'$ соединивъ H съ E, получимъ паралелограмъ $GHED$, въ которомъ GD равна и паралельна HE; но $OGDI$ есть паралелограмъ по построенію, а потому GD равна и паралельна OI. Слѣдовательно HE равна и паралельна OI а $OH=IE$. Но $OHFK$—также по построенію паралелограмъ; въ немъ OH равна и паралельна KF а потому IE равна и паралельна KF слѣдовательно EF равна $IK=\Delta u''$.

Въ треугольникѣ DEF имѣемъ $DF = \Delta U$, $DE = \Delta u$, $EF = \Delta u''$, слѣдовательно

$$\Delta U = \Delta u' + \Delta u$$

Дѣля всѣ члены на Δt

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta u'}{\Delta t} + \frac{\Delta \overline{u''}}{\Delta t}$$

и беря предѣлъ, находимъ

$$\text{пр}\left(\frac{\Delta U}{\Delta t}\right) = \text{пр}\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right) + \text{пр}\left(\frac{\overline{\Delta u''}}{\Delta t}\right)$$

или

$$W = \bar{w} + \bar{w} \tag{68}$$

т. е. составное ускореніе есть геометрическая сумма ускореній составляющихъ.

А отсюда заключаемъ, что ускоренія складываются по правиламъ сложенія векторовъ; слѣдовательно все то, что было выведено относительно дѣйствій надъ геометрическими величинами, а равно и всѣ соотношенія между геометрической суммой и слагаемыми находятъ безъ дальнѣйшихъ оговорокъ примѣненіе и въ настоящемъ случаѣ.

§ 84. Сложеніе ускореній въ движеніи, заданномъ зависимостью координатъ отъ времени.

Пусть будетъ дано:

$$x = f_1(t);\ y = f(t);\ z = f_3(t).$$

По доказанному имѣемъ:

$$v_x = \text{пр}\ \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$v_y = \text{пр}\ \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$v_z = \text{пр}\ \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

Такъ какъ каждое изъ составляющихъ движеній прямолинейное, то въ немъ касательное ускореніе (k), опредѣляемое по зависимости скорости отъ времени, равно полному ускоренію (w), а потому имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} w_x &= k_x = \text{пр}\ \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \\ w_y &= k_y = \text{пр.}\ \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \\ w_z &= k_z = \text{пр.}\ \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

$$w = \bar{k}_x + \bar{k}_y + \bar{k}_z = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \tag{70}$$

Изъ выраженій (69) заключаемъ что ускореніе проекціи движущейся точки на каждую изъ осей координатъ равно проекціи ускоренія точки на ту же ось.

Употребляя обозначенія диференціальнаго исчисленія, найдемъ:

$$k_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

$$k_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2},$$

$$k_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2},$$

$$u = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$$

§ 85 Задачи.

1. Точка имѣетъ два ускоренія: 35 м. сек.^{2} и 87 м./сек.^{2}, направленныя перпендикулярно другъ къ другу Найти: а) величину и б) направленіе составного ускоренія.

2. Точка имѣетъ ускореніе 10 м./сек.^{2}, образующее съ осью Ox уголъ въ 30°. Найти составляющія ускоренія по направленіямъ Ox и Oy

3. Дано: $x = t^2 - 3t$; $y = 4 + t^3$ Найти а) составное ускореніе и б) уголъ, образуемый имъ съ осью x.

4. Дано: $x = r \cos(\omega t)$, $y = r \sin(\omega t)$, гдѣ ω — угловая скорость. Опредѣлить: а) траекторію (и родъ движенія точки) б) скорость и в) ускореніе.

5. Точка движется равномѣрно по кругу. Найти выраженія для составляющихъ ускореній по прямоугольнымъ осямъ проходящимъ черезъ центръ круга

Рѣшенія задачъ.

1. а) 93 77 м./сек.^{2}; б) 68°5 съ ускореніемъ 35 м./сек.^{2}

3. Находимъ послѣдовательно:

$$v_x = 2t - 3$$

$$v_y = 3t^2$$

$$k_x = 2,$$

$$k_y = 6t$$

$$w = \sqrt{4 + 36t^2} = 2\sqrt{1 + 9t^2},$$

$$\cos(w\ x) = \frac{k_x}{w} = \frac{1}{\sqrt{1 + 9t^2}},$$

$$\cos(w\ y) = \frac{k_y}{w} = \frac{3t}{\sqrt{1 + 9t^2}}.$$

Этотъ примѣръ показываетъ вмѣстѣ съ тѣмъ, какъ по зависимости координатъ отъ времени опредѣлить скорость и ускореніе. Въ такомъ случаѣ находятъ эти величины отдѣльно для каждой оси, а затѣмъ для опредѣленія дѣйствительныхъ (составныхъ) значеній скорости и ускоренія складываютъ соотвѣтствующія величины, найденныя для осей. Здѣсь опять выступаютъ на видъ тѣ достоинства опредѣленія движенія посредствомъ составляющихъ прямолинейныхъ движеній (координатъ движущейся точки), на которыя мы уже указывали выше (§ 41). Вслѣдствіе этого такой способъ и находитъ предпочтительное примѣненіе.

4. (См. §). а) Возвышая x и y въ квадратъ и складывая, находимъ уравненіе траекторіи: $x^2 + y^2 = r^2$, что представляетъ кругъ съ центромъ въ началѣ координатъ. Въ началѣ временъ—точка находится въ пересѣченіи круга съ осью x.

б) Составляющія скорости $v_x = -r\omega \sin(\omega t)$, $v_y = r\omega \cos(\omega t)$. Составная скорость $v = r\omega$.

в) Ускоренія: составляющія: $-r\omega^2 \cos(\omega t)$ и $-r\omega^2 \sin(\omega t)$; составное $r\omega^2$. Направленіе его: $\cos(w, x) = \frac{-r\omega^2 \cos(\omega t)}{r\omega^2} = -\cos(\omega t)$. Направленіе же скорости точки для угла ωt таково: $\frac{-r\omega \sin(\omega t)}{r\omega} = -\sin(\omega t)$. Отсюда заключаемъ, что w и v взаимноперпендикулярны, а такъ какъ v направлена по касательной къ траекторіи (къ кругу), то w по радіусу къ центру. Такое ускореніе не измѣняетъ величины скорости; слѣдовательно разсматриваемое движеніе есть движеніе равномѣрное (§ 76).

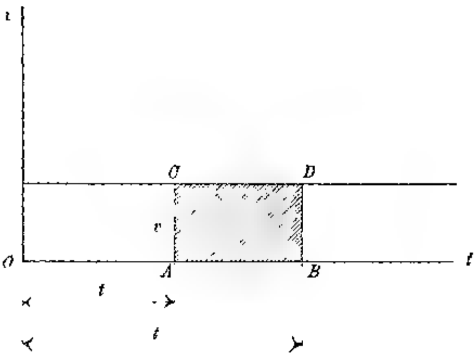
5. См. предыдущую задачу.

ГЛАВА VII

Опредѣленіе движенія точки по скорости

§ 86 Равномѣрное движеніе

Выше мы разсмотрѣли вопросъ о нахожденіи по данной зависимости разстоянія отъ времени величины скорости, направленіе которой мы опредѣляли, имѣя траекторію движенія. Теперь представляется обратный вопросъ: нельзя ли, имѣя скорость движенія, какъ функцію времени, найти зависимость разстоянія отъ времени для даннаго движенія другими словами имѣть возможность опредѣлить для любого мгновенія разстояніе движущейся точки отъ начала разстояній? Изслѣдованіе этого вопроса и составитъ предметъ настоящей главы.



90

Обратимся сначала къ равномѣрному движенію, въ которомъ скорость v есть величина постоянная, графически зависимость между t и v въ соотвѣтствующихъ осяхъ представится прямой, паралельной оси t (фиг. 90). Но въ равномѣрномъ движеніи скорость равна отношенію разстоянія, пройденнаго точкою въ данный промежутокъ времени, къ послѣднему: такъ для промежутка времени, равнаго $(t_1 - t)$, будемъ имѣть:

$$v = \frac{s_{t_1} - s_t}{t_1 - t},$$

откуда

$$s_{t_1} - s_t = v\,(t_1 - t) \qquad (1)$$

Проводя ординаты изъ точекъ A и B (фиг. 90), абсцисы которыхъ суть t и t_1 найдемъ что площадь прямоугольника $ACDB$ т. е. площадь прямоугольника, заключающагося между осью временъ, линіей скоростей и ординатами, соотвѣтствующими начальному и конечному мгновеніямъ взятаго промежутка времени равна

$$v\,(t_1 - t),$$

т. е. разстоянію, пройденному точкою за промежутокъ времени $(t_1 - t)$ Говоря: площадь прямоугольника равняется пройденному точкою разстоянію, мы должны понимать это такимъ образомъ что въ площади прямоугольника заключается столько квадратныхъ единицъ, сколько въ пройденномъ въ соотвѣтствующее время разстояніи линейныхъ единицъ· поэтому точнѣе можно было бы сказать что площадь выражаетъ, измѣряетъ или численно равна пройденному разстоянію; но имѣя въ виду сказанное, для краткости рѣчи, говорятъ: площадь равна пройденному разстоянію.

Опредѣляя величину площади, слѣдуетъ высоты ея измѣрять единицами скорости, а основанія — единицами времени; если напр. масштабъ скорости будетъ 10 см./сек. въ одномъ см., а масштабъ времени — 2 *сек.* въ *одномъ см.*, то площадь квадрата, стороны котораго равны одному см., будетъ выражать разстояніе въ 10 см./сек. $\times$ 2 сек. $=$ 20 см. Если затѣмъ измѣренная площадь будетъ содержать 8 кв. см., то разстояніе, пройденное точкою, будетъ равно: $20 \times 8 — 160$ см

Здѣсь слѣдуетъ обратить вниманіе на то обстоятельство, что мы не получаемъ всего разстоянія точки отъ начала разстояній, а только величину перемѣщенія точки въ продолженіе даннаго промежутка времени. Если мы желаемъ найти разстояніе точки въ концѣ промежутка времени t (отъ начала разстояній) то полагая въ формулѣ (71) $t_1 = t$ и $t — 0$, получимъ

$$s_t - s_0 = v\,(t - 0) = vt$$

откуда

$$s_t = s_0 + vt \tag{72}$$

Отсюда видно, что для нахожденія s кромѣ значенія скорости намъ *должно быть дано* начальное разстояніе s_0

Итакъ въ разсматриваемомъ случаѣ при опредѣлении разстоянія (считая его какъ всегда, отъ начала разстояній) должны быть даны скорость и начальное разстояніе. Въ зависимости отъ того, какое значеніе при данной скорости дадимъ мы начальному разстоянію т. е. въ зависимости отъ того, отъ какой точки на траекторіи мы начнемъ отсчитывать разстоянія, послѣднія получатъ тѣ или другія величины. Только что сказанное вполнѣ отвѣчаетъ сущности дѣла такъ какъ начальное разстояніе совершенно не зависитъ отъ другихъ факторовъ, каковы время пройденное разстояніе, скорость и т п и потому можетъ быть и должно быть дано особо

Такъ напр., если намъ будетъ дано, что пароходъ, отправившійся внизъ по Волгѣ изъ Саратова, проходитъ въ часъ 23 вер., то мы можемъ найти разстояніе, пройденное имъ отъ Саратова же въ любой промежутокъ времени Но если бы пожелали отсчитывать разстоянія, на которыхъ пароходъ находится, отъ Нижняго или отъ Казани, то кромѣ значенія скорости намъ необходимо знать разстоянія Саратова отъ того или другого изъ указанныхъ городовъ; эти разстоянія и будутъ начальными разстояніями въ разсматриваемомъ вопросѣ и выборъ того или другого зависитъ вполнѣ отъ насъ, не завися отъ скорости движенія парохода.

Выборъ начальнаго разстоянія можетъ быть такимъ образомъ сдѣланъ совершенно произвольно; но разъ ему приписано опредѣленное значеніе, то послѣднее уже остается постояннымъ въ данномъ вопросѣ. Ввиду этого начальное разстояніе является постоянной произвольной величиной.

Скорость и начальное разстояніе позволяетъ опредѣлить при помощи уравненія (72) разстояніе точки, если же мы хотимъ найти положеніе точки въ пространствѣ то намъ должна быть дана сверхъ того траекторія. Слѣдовательно, если мы будемъ имѣть данными: скорость (v), начальное разстояніе (s_0) и траекторію то движеніе точки будетъ опредѣлено.

§ 87. Задачи

1. Дано: $v = -3$, $s_0 = 4$. Найти разстояніе

2. Рѣшить предыдущую задачу графически.

3. Опредѣлить разстояніе, пройденное тѣломъ отъ конца третьей до конца шестой секунды, если $v = 2$.

4. Дано: $v = 2t$. Можно ли найти разстояніе движущейся точки отъ начала разстояній.

Рѣшенія задачъ.

1. $s = 4 - 3t$ (§ 86)

2. Фиг. 90

3. $s_6 - s_3 = 2(6 - 3) = 6$.

4 Нѣтъ такъ какъ для нахожденія разстоянія (s) должно быть дано начальное разстояніе s_0 (§ 86)

§ 88. Опредѣленіе площади кривой линіи.

Ранѣе, нежели мы перейдемъ къ опредѣленію разстоянія по данной скорости въ перемѣнномъ движеніи, докажемъ теорему:

Площадь, ограниченная кривой линіей (фиг. 91), осью абсциссъ и двумя ординатами, есть предѣлъ суммы площадокъ элементарныхъ прямоугольниковъ—внѣшнихъ или внутреннихъ относительно кривой—при безконечномъ увеличеніи числа ихъ

Пусть будетъ дана кривая AB. Вычислимъ площадь ея $OABC$. Раздѣлимъ основаніе взятой площади кривой на очень большое число элементовъ $\Delta_1 x$, $\Delta_2 x$, $\Delta_3 x \ldots \Delta_n x$; проведемъ изъ точекъ дѣленія ординаты до пересѣченія ихъ съ кривой. Обозначимъ величины ординатъ соотвѣтственно $y_0, y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$. Черезъ точки $A, a, b, c \ldots$ проведемъ линіи, паралельныя оси абсцисъ до пересѣченія съ сосѣдними ординатами (вправо) или продолженіями ихъ (влѣво).

На каждомъ элементѣ Δx построено по три площадки: два прямоугольника и площадка кривой ΔS, причемъ площадка кривой болѣе внутренняго прямоугольника, но меньше внѣшняго.

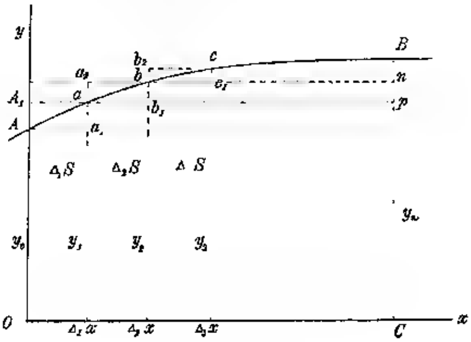
Выражая площадки прямоугольниковъ черезъ ихъ основаніе и высоту, получимъ рядъ слѣдующихъ неравенствъ

$$y_0\Delta_1 x < \Delta_1 S < y_1\Delta_1 x$$

$$y_1\Delta_2 x < \Delta_2 S < y_2\Delta_2 x,$$

$$y_2\Delta_3 x < \Delta_3 S < y_3\Delta_3 x,$$

$$y_{n-1}\Delta_n x < \Delta_n S < y_n\Delta_n x$$



91

Сложимъ соотвѣтственныя части этихъ неравенствъ.

$$y_0\Delta_1 x + y_1\Delta_2 x + y_2\Delta_3 x + \ldots < \Delta_1 S + \Delta_2 S + \Delta_3 S + \ldots + \Delta_n S <$$
$$< y_1\Delta_1 x + y_2\Delta_2 x + y_3\Delta_3 x + \ldots$$

Пользуясь принятыми обозначеніями для сокращенія письма (§ 24) будемъ имѣть

$$\sum y_{i-1}\Delta_i x < S < \sum_1 y_i\Delta_i x,$$

гдѣ S выражаетъ разсматриваемый участокъ площади кривой между ординатами y_0 и y_n.

Поведемъ теперь обѣ суммы прямоугольниковъ къ предѣламъ, увеличивая число прямоугольниковъ до безконечности или, что то же, подводя основанія всѣхъ прямоугольниковъ къ нулю. При этомъ разность между суммами прямоугольниковъ можетъ быть сдѣлана произвольно малой, иначе говоря, безконечномалой.

Что дѣйствительно разность между суммой внѣшнихъ и внутреннихъ прямоугольниковъ, выражающаяся суммой прямоугольниковъ AA_1aa_1, aa_2bb

bb_2cc_1 и т. д., по мѣрѣ увеличенія числа ихъ можетъ быть сдѣлана произвольно малой, не трудно обнаружить слѣдующимъ путемъ. Пусть прямоугольникъ aa_3b_1 имѣетъ наибольшую высоту по сравненію съ прочими подобными прямоугольниками. Если мы проведемъ линіи A_1p и mn, параллельныя оси Ox, то, очевидно, площадь A_1mnp будетъ больше разности между суммой внѣшнихъ и внутреннихъ прямоугольниковъ, по мѣрѣ увеличенія числа послѣднихъ отрѣзокъ np будетъ уменьшаться, а слѣдовательно будетъ уменьшаться и площадка A_1mnp, причемъ уменьшеніе послѣдней можетъ продолжаться безгранично; но она больше разности между суммами внутреннихъ и внѣшнихъ прямоугольниковъ. Слѣдовательно послѣдние подавно могутъ быть сближены безгранично по своей величинѣ.

Что же касается площади кривой то эта площадь при данной величинѣ основанія будетъ величиной постоянной и будетъ всегда заключаться между обѣими суммами, отличаясь отъ каждой изъ нихъ при безконечномъ увеличеніи числа прямоугольниковъ на величины безконечномалыя. А въ такомъ случаѣ мы заключаемъ, что площадь кривой будетъ предѣломъ той и другой суммы прямоугольниковъ итакъ

$$S = \text{пр}\left[\sum_1^i y_{i-1}\Delta_i x\right]_{\Delta_i x = 0},$$

или

$$S = \text{пр}\left[\sum_1^i y_i\Delta_i x\right]_{\Delta_i x = 0}. \tag{73}$$

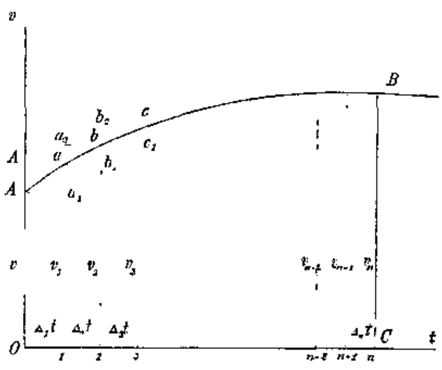
Въ разсмотрѣнномъ только что выводѣ слѣдуетъ брать такую площадь кривой, всѣ ординаты которой при увеличеніи абсциссъ или увеличиваются или уменьшаются, такъ какъ въ противномъ случаѣ приведенныя выше неравенства не будутъ справедливы. Но очевидно, что сдѣланное доказательство справедливо для площади произвольнаго вида.

Приложимъ теперь доказанную теорему къ вычисленію разстоянія, пройденнаго точкой, по данной скорости въ случаѣ перемѣннаго движенія

§ 89. Опредѣленіе разстоянія точки въ перемѣнномъ движеніи.

Пусть требуется найти разстояніе, пройденное точкою въ теченіе t секундъ отъ начала временъ, если зависимость скорости отъ времени дана функціей $v = f(t)$, представленной графически на фиг. 92

Для рѣшенія этого вопроса поступимъ такъ, какъ мы дѣлали это въ предыдущемъ параграфѣ. Раздѣлимъ промежутокъ времени t на нѣкоторое очень большое число частей: $\Delta_1 t$, $\Delta_2 t$, $\Delta_3 t$, ... $\Delta_n t$, равныхъ или неравныхъ между собою — безразлично. Изъ точекъ дѣленія: 1, 2, 3, ... n проведемъ ординаты которыя и представятъ по величинѣ скорости, соотвѣтствующія мгновеніямъ, отдѣляющимъ одинъ промежутокъ отъ другого; обозначимъ эти скорости соотвѣтственно черезъ v_0, v_1, v_2 ... v_n. Если мы предположимъ, что скорость въ те ченiе напр. перваго промежутка не мѣнялась по величинѣ и была равна наименьшему значенiю скорости въ теченiе всего промежутка а именно скорости въ началѣ его v_0, то въ такомъ случаѣ точка двигалась бы равномѣрно, и на основанiи найденнаго выше для равномѣрнаго движенiя мы имѣемъ что разстоянiе, пройденное точкою въ этотъ промежутокъ времени, выразилось бы площадкой внутренняго относительно кривой прямоугольника OAa_1 1 Если бы скорость, оставаясь также въ теченiе $\Delta_1 t$ постоянной, была бы по величинѣ равна наибольшему значенiю дѣйствительной скорости движенiя въ продолженiе разсматриваемаго промежутка $\Delta_1 t$, т е. при восходящей кривой *) была бы равна скорости въ концѣ $\Delta_1 t$, то пройденное разстоянiе изобразилось бы площадкою внѣшняго прямоугольника $OA_1 a$ 1.



92

Дѣйствительно пройденное разстоянiе, когда скорость не оставалась постоянной, будетъ, очевидно, заключаться между этими прямоугольниками.

Разсуждая подобнымъ же образомъ, для второго промежутка $\Delta_2 t$ при обозначенiяхъ, указанныхъ на чертежѣ, найдемъ, что пройденное точкою разстоянiе будетъ больше площадки 1 ab_1 2 и меньше площадки 1 $a_2 b$ 2 и т. д

Такъ какъ разстоянiе, пройденное движущейся точкой въ каждый изъ промежутковъ, на которые мы раздѣлили время t, будетъ больше соотвѣтствующаго внутренняго прямоугольника и меньше внѣшняго, то и все разстоянiе, пройденное точкой въ теченiе времени t, будетъ больше суммы внутреннихъ прямоугольниковъ и меньше суммы внѣшнихъ. Мы, слѣдовательно, имѣемъ, что пройденное разстоянiе заключается по величинѣ между двумя этими суммами. Но мы видѣли уже что между этими же суммами заключается и площадь кривой, причемъ она представляетъ собою предѣлъ той и другой суммы. При этомъ и пройденное разстоянiе и площадь данной кривой суть вели

*) Восходящей кривой въ противуположность нисходящей называютъ такую кривую ординаты которой увеличиваются съ возрастанiемъ абсциссъ

чины постоянныя Суммы же внутреннихъ и внѣшнихъ прямоуголь никовъ величины перемѣнныя, такъ какъ онѣ зависятъ отъ того числа n, на которое мы раздѣлимъ данный промежутокъ времени t. Если мы число этихъ частей будемъ увеличивать, уменьшая каждый изъ элементовъ времени $\Delta_1 t$, $\Delta_2 t$, $\Delta_3 t$ и т. д., то разность между двумя соотвѣтствующими прямоугольниками (внутреннимъ и внѣшнимъ) будетъ уменьшаться; будетъ уменьшаться также и разность между суммами прямоугольниковъ. Разность эту мы можемъ сдѣлать произвольно малой, стоитъ только увеличивать число промежутковъ, на которое мы раздѣлили время t, причемъ площадь $OABC$ кривой и пройденное разстояніе будутъ всегда заключаться между этими суммами. Мы, слѣдовательно, видимъ, что двѣ постоянныя величины (площадь кривой и пройденное разстояніе заключаются между двумя перемѣнными величинами, разность между которыми (также величина перемѣнная) можетъ быть сдѣлана менѣе всякой заданной величины, т е разность эта есть величина безконечномалая. Слѣдовательно, обѣ постоянныя величины между собою различаются на величину (также, разумѣется постоянную), которая должна быть менѣе всякой данной величины; очевидно, эта постоянная величина можетъ быть только нулемъ, т. е. обѣ постоянныя между собою равны; а потому мы заключаемъ, что разстояніе, пройденное точкою въ теченіе даннаго промежутка времени, равно площади, ограниченной кривой, выражающей зависимость скорости отъ времени, осью временъ и двумя ординатами, соотвѣтствующими началу и концу даннаго промежутка времени

Относительно опредѣленія численнаго значенія площади, слѣдуетъ, согласно сказанному выше при разсмотрѣніи равномѣрнаго движенія (§ 86) найти значеніе (цѣну) одной квадратной единицы (напр. n метр.), а затѣмъ, остается вычислить число квадратныхъ единицъ въ ней заключающихся (N), или измѣрить ее помощью какого-либо инструмента *), тогда пройденное въ данное время разстояніе выразится произведеніемъ Nn.

Мы напишемъ безъ затрудненія аналитическое выраженіе для пройденнаго точкою разстоянія, пользуясь выраженіемъ (73), гдѣ слѣдуетъ лишь вмѣсто S поставить разстояніе, пройденное точкою въ t сек. **), а именно $(s \quad s_0)$ вмѣсто y—v, и вмѣсто Δx Δt. При этомъ получимъ

$$s - s_0 \quad \text{пр} \left[\sum_1 v_i \Delta_i t \right]_{\substack{n - \infty \\ \Delta t = 0}} \tag{74}$$

*) О способахъ измѣренія площадей см. ниже § 94

**) А не разстояніе ея отъ начала разстояній въ концѣ t ой сек На это слѣдуетъ обратить вниманіе

Мы такимъ образомъ имѣемъ: разстояніе, пройденное движущейся точкой въ теченіе даннаго промежутка времени равняется предѣлу суммы произведеній изъ элементовъ времени, взятыхъ на протяженіи даннаго промежутка времени, на скорости, соотвѣтствующія каждому изъ нихъ, при условіи увеличенія числа промежутковъ до безконечности или уменьшенія каждаго изъ нихъ до нуля.

И здѣсь можно повторить то, что было сказано при равномѣрномъ движеніи: если мы имѣемъ только зависимость скорости отъ времени, то написанное равенство даетъ возможность опредѣлить только разстояніе, пройденное точкою въ теченіе даннаго времени t. Если мы желаемъ знать всю величину разстоянія, на которомъ точка находится отъ начала разстояній, то должно быть дано начальное разстояніе s_0: тогда имѣемъ

$$s = s_0 + \text{пр}\left[\sum^{n} v_i \Delta_i t\right]_{\Delta t = 0}$$

Итакъ для того, чтобы движеніе было вполнѣ опредѣлено должны быть даны:

1) скорость движенія въ зависимости отъ времени

2) начальное разстояніе

3) траекторія.

Нужно обратить вниманіе на то, какъ вычисляется величина

$$\text{пр}\left[\sum^{n} v\, \Delta_i t\right]_{\Delta t = 0}$$

на основаніи данной зависимости $v = f(t)$.

1) Время t дѣлится на очень малыя части или элементы Δt;

2) берутся произведенія каждаго изъ этихъ элементовъ на скорость въ началѣ или концѣ его; обыкновенно берутъ послѣднее;

3) всѣ подобныя произведенія складываются;

4) находится предѣлъ полученной суммы при увеличеніи числа промежутковъ до ∞ или при уменьшеніи каждаго изъ нихъ до нуля.

Такъ какъ обыкновенно извѣстно, въ какомъ предположеніи берется предѣлъ суммы, то пишутъ просто:

$$\text{пр} \sum_{1}^{n} v_i \Delta_i t$$

Для сокращенія письма откидываютъ сверхъ того значки у v_i и $\Delta_i t$, а также у s_i, а для предѣловъ суммированія употребляютъ другое обозначеніе: указываютъ длительность времени t, которое дѣлится на промежутки Δt; нижній знакъ у Σ указываетъ начальное мгновеніе даннаго промежутка времени t и верхній конецъ его (нуль и t) окончательно имѣемъ:

$$\text{пр} \sum_{0}^{t} v\,\Delta t,$$

и слѣдовательно

$$s = s_0 + \text{пр} \sum_{0}^{t} v\,\Delta t \qquad (10)$$

Разсматривая выраженіе это съ математической стороны мы видимъ, что оно позволяетъ по данной зависимости

$$v = f(t)$$

вычислить s также, какъ нѣкоторую функцію времени; мы находимъ, вообще говоря

$$s = F(t)$$

Но v есть, какъ было упомянуто выше, производная отъ разстоянія по времени, слѣдовательно, вопросъ, изложенный въ настоящей главѣ, относится къ нахожденію по данной производной v нѣкоторой функціи s этой послѣдней, являющейся по отношенію къ производной первообразной. Подобное дѣйствіе, обратное опредѣленію по данной функціи ея производной, носитъ названіе интегрированія. Выраженіе вида

$$\text{пр} \sum v\,\Delta t$$

называется интеграломъ функціи v *)

Для вычисленія интеграла функція $v = f(t)$ должна быть дана; тогда подъ знакомъ суммы мы будемъ имѣть лишь функцію t или въ общемъ случаѣ функцію какой бы то ни было другой независимой перемѣнной, и слѣдовательно интегралъ будетъ также функціей той же независимой перемѣнной.

§ 90. О вычисленіи предѣла суммы безконечномалыхъ величинъ.

Мы находимъ величину площади, беря предѣлъ суммы прямоугольниковъ причемъ послѣдніе получаются произвольнымъ дѣленіемъ основанія площади на элементы при соблюденіи лишь одного условія, чтобы всѣ эти элементы имѣли предѣломъ нуль. Суммы выбранныхъ тѣмъ или другимъ образомъ прямоугольниковъ будутъ отличаться отъ площади кривой на различныя величины, выражающіяся суммами площадокъ между верхней стороной прямоугольника и самой кривой. Однако, какъ мы видимъ, такая разница какъ въ каждомъ изъ слагаемыхъ, такъ и въ суммѣ ихъ, не оказываетъ вліянія на конечный результатъ, получающійся вычисленіемъ предѣла той или другой суммы. Мы всегда получимъ въ предѣлѣ точную величину площади кривой.

Здѣсь опять умѣстно указать на пользу „способа предѣловъ", позволяющаго найти точное значеніе площади или, вообще говоря, значеніе первообразной функціи по данной производной ея.

Элементарные прямоугольники, имѣющіе безконечномалыя основанія и конечныя высоты, будутъ величинами безконечномалыми. Площадки же, которыми мы пренебрегаемъ при отыскиваніи предѣла суммы, имѣютъ безко

*) Терминъ этотъ (отъ латинскаго слова integer — цѣлый) какъ мы видимъ вполнѣ выражаетъ собою сущность дѣла.

нечномалыя основанія и сверхъ того безконечномалыя высоты, такъ какъ скорость (данная функція) измѣняется съ теченіемъ времени (независимой перемѣнной) непрерывно, т. е безконечномалому приращенію послѣдняго отвѣчаетъ безконечномалое приращеніе первой. Слѣдовательно, площадки, о которыхъ идетъ рѣчь, будутъ, такъ сказать, вдвойнѣ безконечномалыми или, какъ говорятъ, безконечномалыми **второго порядка** въ отличіе отъ просто безконечномалыхъ, называемыхъ безконечномалыми **перваго порядка**. Мы такимъ образомъ видимъ, что при вычисленіи предѣла суммы безконечномалыхъ перваго порядка можно пренебрегать безъ ущерба для точности результатовъ безконечномалыми второго порядка или, болѣе обще, при вычисленіи предѣла суммы безконечномалыхъ извѣстнаго порядка можно пренебрегать безконечно малыми высшихъ порядковъ.

Изложенное положеніе является основнымъ положеніемъ интегральнаго исчисленія, задача котораго состоитъ въ разысканіи интеграловъ различныхъ функцій.

Употребляя обозначенія высшаго анализа можемъ написать:

$$s = s_0 + \int_0^t v\,dt,$$

гдѣ знакъ интеграла — $\int$ выражаетъ предѣлъ суммы подъинтегральнаго количества $v\,dt$, въ которомъ Δt замѣнено черезъ dt.

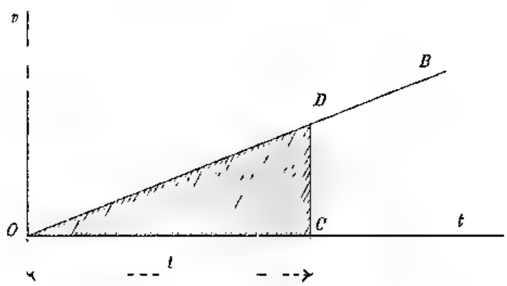
§ 91. Опредѣленіе разстоянія въ частныхъ случаяхъ движенія.

Примѣнимъ изложенныя соображенія, ведущія къ опредѣленію разстоянія, къ нѣкоторымъ частнымъ случаямъ.

1) Зависимость скорости отъ времени дана прямой OB (фиг. 93), причемъ $tg\,\alpha = k$, что аналитически выражается такъ:

$$v = kt$$

Пусть требуется найти разстояніе, соотвѣтствующее времени t.



93

Это разстояніе графически выразится площадью, заключенною между линіей OB, осью временъ и ординатой CD, проведенной изъ конца времени t (ордината, проведенная изъ начала его, равна нулю, такъ какъ линіи OB и ось абсциссъ здѣсь пересѣкаются) т. е. площадью ΔOCD; но $CD = t\,.\,tg\,\alpha = t\,.\,k$, а потому

$$\text{площ. } \Delta OCD = \frac{OC\cdot CD}{2} = \frac{t\,.\,kt}{2} = \frac{kt^2}{2}.$$

Слѣдовательно

$$s - s_0 = \frac{kt^2}{2}$$

Если желаемъ получить $(s - s_0)$ аналитически пользуясь уравненіемъ

$$v = kt$$

то поступимъ такъ, какъ было указано, а именно.

а) дѣлимъ t на промежутки Δt, которые для простоты вычисленій беремъ равными между собою, что вполнѣ возможно, такъ какъ касательно ихъ относительныхъ величинъ никакихъ ограниченій сдѣлано не было.

б) Находимъ скорости, соотвѣтствующія напр концамъ взятыхъ промежутковъ времени, таковы:

въ концѣ перваго промежутка $v_1 = k\Delta t$,
» » второго » $v_2 = k2\Delta t$,
» » третьяго » $v_3 = k3\Delta t$,
. . . . . .
въ концѣ n-аго промежутка $v_n = kn\Delta t$.

в) Беремъ произведенія изъ величинъ каждаго изъ элементовъ Δt на соотвѣтствующую ему скорость:

$$v_1\Delta t = k\Delta t \,.\, \Delta t = k(\Delta t)^2,$$
$$v_2\Delta t = k2(\Delta t)^2 = 2k(\Delta t)^2,$$
$$v_3\Delta t = k3(\Delta t)^2 = 3k(\Delta t)^2,$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$
$$v_n\Delta t = kn(\Delta t)^2 = nk(\Delta t)^2.$$

г) Складываемъ эти произведенія:

$$k(\Delta t)^2 + 2k(\Delta t)^2 + 3k(\Delta t)^2 + \ldots + nk(\Delta t)^2 =$$
$$= k(\Delta t)^2(1 + 2 + 3 + \ldots + n), \tag{76}$$

при чемъ

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Выразимъ n въ зависимости отъ t, такъ какъ въ выраженіе (76) входитъ уже Δt Всѣ элементы были взяты между собою равными а потому

$$\Delta t = \frac{t}{n}$$

или

$$n = \frac{t}{\Delta t}.$$

Слѣдовательно

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{t^2}{2(\Delta t)^2} + \frac{t}{2\Delta t}.$$

Вставляя эту величину въ уравненіе (76) получимъ:

$$k(\Delta t)^2\left(\frac{t^2}{2(\Delta t)^2}+\frac{t}{2\Delta t}\right)=k\frac{t^2}{2}+k\frac{t\Delta t}{2}.$$

д) Беря предѣлъ этого выраженія при подведеніи Δt къ нулю видимъ, что второй членъ суммы обращается въ нуль, а первый отъ Δt не зависитъ, а потому

$$\text{пр}\left(k\frac{t^2}{2}+\frac{k\cdot t\Delta t}{2}\right)=\frac{kt^2}{2}=s-s_0$$

т. е. то, что было уже найдено графическимъ путемъ.

Мы нарочно остановились подробно на этомъ примѣрѣ, чтобы показать весь послѣдовательный ходъ вычисленія $(s-s_0)$, который остается одинаковымъ и въ прочихъ случаяхъ, мѣняясь лишь со стороны ариѳметическихъ выкладокъ.

Ввиду этого слѣдующій примѣръ излагаемъ безъ детальныхъ объясненій.

2. Дано:

$$v=ct^2$$

Найти

$$s=F(t)$$

Скорости въ концѣ элементовъ Δt

$$v_1=c(\Delta t)^2,$$
$$v_2=c(2\Delta t)^2,$$
$$v_3=c(3\Delta t)^2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$v_n=c(n\Delta t)^2$$

Сумма произведеній скоростей на величину элементовъ

$$v_1\Delta t+v_2\Delta t+v_3\Delta t+\ldots+v_n\Delta t=\Delta t(v_1+v_2+\ldots+v_n)=$$
$$=\Delta t[c(\Delta t)^2+c(2\Delta t)^2+c(3\Delta t)^2+\ldots+c(n\Delta t)^2]=$$
$$=c(\Delta t)^3[1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2].$$

Но

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{1\cdot2\cdot3}$$

а такъ какъ

$$n=\frac{t}{\Delta t}$$

то

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{1\cdot2\cdot3}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}=$$
$$=\frac{t^3}{3(\Delta t)^3}+\frac{t^2}{2(\Delta t)^2}+\frac{t}{6\Delta t}.$$

Слѣдовательно

$$s - s_0 = \text{пр}\left[\frac{ct^3}{3} + \frac{ct^2\Delta t}{2} + \frac{ct(\Delta t)^2}{6}\right] = \frac{ct^3}{3},$$

$$s = s_0 + \frac{ct^3}{3}$$

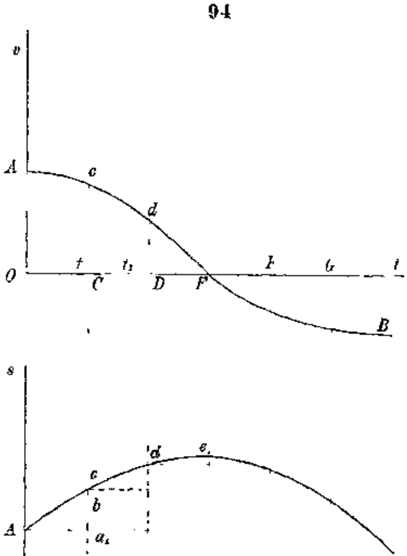
Если бы напр. было дано $s_0 = 0$, то

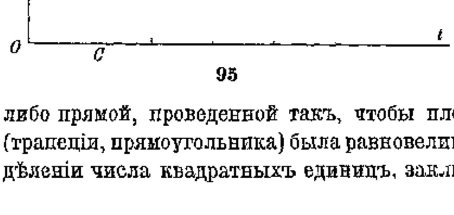
$$s = \frac{ct^3}{3}.$$

Вообще если дано $v = at^n$, то для нахожденія $s - s_0$ слѣдуетъ показателя у t увеличить на единицу и величину at^{n+1} раздѣлить на $(n+1)$; получимъ $s - s_0 = \frac{at^{n+1}}{n+1}$. Необходимо, какъ это вытекаетъ изъ самой сущности дѣла, произвести алгебраическія дѣйствія, обратныя тѣмъ, которыя были необходимы для нахожденія v по s (§ 56, задача 10).

§ 92. Построеніе кривой разстояній по данной кривой скоростей

94





95

Пусть зависимость v отъ t дана графически кривой AB (фиг. 94); сверхъ того дано начальное разстояніе $= s_0$. Требуется построить кривую, выражающую зависимость разстоянія отъ времени для разсматриваемаго движенія.

Когда $t = 0$, то $s = s_0$; отложимъ его въ соотвѣтствующемъ масштабѣ отъ точки 0 по оси разстояній (фиг. 95, OA). Далѣе, разстояніе пройденное точкою въ нѣкоторый промежутокъ времени $t_1 = OC$, выражается по доказанному площадью фигуры $OAcC$. Практически для простоты вычисленій замѣняютъ кривую AC какой либо прямой, проведенной такъ, чтобы площадь полученной фигуры (трапеціи, прямоугольника) была равновелика площади $OAcC$, при опредѣленіи числа квадратныхъ единицъ, заключающихся въ полученной фигурѣ, принимаютъ соотвѣтственные масштабы при измѣреніи протяженій паралельныхъ оси временъ и оси скоростей. На фиг. 95 по линіи Ot откладываемъ въ выбранномъ масштабѣ величину промежутка t_1 (на фиг. 94 и 95 для временъ взятъ одинъ и тотъ же масштабъ); изъ точки A проводимъ линію Aa_1, паралельную оси t, и отъ точки a_1 откладываемъ величину площади $OAcC$, равную положимъ b Точка c принадлежитъ искомой кривой разстояній. Подобнымъ же образомъ поступаемъ далѣе беря промежутокъ $t_2 = CD$ (фиг. 94) Разстояніе, пройденное въ продолженіи его при уменьшающейся скорости, равно площади $CcdD$; выразивъ эту площадь въ масштабѣ разстояній и придавъ ее къ ординатѣ Cc (фиг. 95), получимъ точку кривой разстояній d. Послѣ точки E скорость мѣняетъ направленіе, дѣлаясь отрицательной, слѣдовательно разстоянія точки отъ начала разстояній начинають уменьшаться кривая разстояній склоняется къ оси t, ординаты ея уменьшаются.

Имѣя данными. зависимость скорости движущейся точки отъ времени и начальное разстояніе, мы имѣемъ возможность найти только законъ разстояній. Очевидно, для полнаго опредѣленія движенія необходимо знать траекторію точки, которая и должна быть дана особо.

§ 93 Опредѣленіе движенія точки при заданіи скорости составляющими ея по осямъ координатъ.

Такъ какъ движеніе точки можетъ быть опредѣлено посредствомъ двухъ или нѣсколькихъ составляющихъ движеній, то мы, основываясь на этомъ, можемъ представить себѣ подобный же пріемъ опредѣленія движенія посредствомъ скорости, когда для каждаго изъ составляющихъ движеній будутъ даны: зависимость скорости отъ времени, начальное разстояніе и траекторія движущейся точки. По скорости и начальному разстоянію мы найдемъ зависимость разстоянія отъ времени для каждаго изъ составляющихъ движеній; а тогда составное или дѣйствительное движеніе точки будетъ вполнѣ опредѣлено.

Наиболѣе простымъ и удобнымъ въ приложеніяхъ будетъ опредѣленіе движенія помощью составляющихъ движеній по взаимноперпендикулярнымъ осямъ координатъ съ данными для каждаго: направленіе оси зависимость скорости отъ времени и начальное разстояніе

Итакъ пусть будутъ даны: оси x и y, предполагая движеніе происходящимъ въ плоскости *), составляющія скорости по этимъ осямъ:

$$v_x = f_1(t)$$
$$v_y = f_2(t)$$

и кромѣ того начальныя разстоянія для каждаго изъ составляющихъ

*) Если движеніе происходитъ въ пространствѣ то должна быть дана третья ось

движеній: x_0 и y_0. Послѣдныя есть вмѣстѣ съ тѣмъ координаты опре дѣляющія начальное положеніе точки.

По изложенному выше найдемъ:

$$
\left.
\begin{aligned}
x &= x_0 + \text{пр} \sum_0^t v_x \Delta t \\
y &= y_0 + \text{пр} \sum_0^t v_y \Delta t
\end{aligned}
\right\}
\qquad (7)
$$

Мы имѣемъ такимъ образомъ значенія координатъ, съ одной стороны дающія величины пройденныхъ точкою разстояній по каждой изъ осей, а съ другой (геометрической) — опредѣляющія положеніе точки въ плоскости ея движенія для даннаго мгновенія. Движеніе такимъ образомъ будетъ опредѣлено

Вторыя части равенствъ будутъ вообще говоря нѣкоторыми функціями времени, т. е.

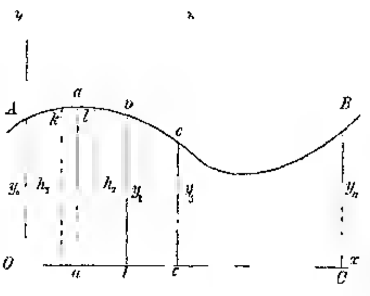
$$
x = x_0 + \psi_1(t),
$$
$$
y = y_0 + \psi_2(t),
$$

изъ которыхъ исключеніемъ перемѣнной t легко найдется зависимость между x и y, представляющая въ геометрическомъ отношеніи уравненіе траекторіи.

Если бы мы пожелали начальныя разстоянія сдѣлать равными нулю, то стоитъ только перевести начало въ точку, координаты которой суть: x_0 и y_0.

§ 94. Приближенныя формулы для вычисленія площадей.

1. Формула трапецій. Основаніе площади (фиг. 96) разбиваютъ на n равныхъ частей, проводятъ ординаты до пересѣченія съ кривой, точки $A, a, b, c\ldots$ соединяютъ между собою прямыми. Тогда получится рядъ трапецій, сумма площадей которыхъ будетъ приблизительно равняться площади кривой. Для этой суммы получимъ:



96

$$
\frac{x}{n} \cdot \frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{x}{n} \cdot \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{x}{n} \cdot \frac{y_2 + y_3}{2} + \ldots =
$$
$$
= \frac{x}{n} \left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + \frac{y_n}{2} \right] =
$$
$$
= \frac{x}{n} \left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} \right]
$$

т. е. площадь кривой равна произведенію основанія трапеціи на полусумму крайнихъ ординатъ и сумму промежуточныхъ ординатъ.

2. Формула Симпсона. Раздѣлимъ основаніе опредѣляемой площади (фиг. 96) на четное число (n) равныхъ частей Δ; проведемъ черезъ точки дѣленія ординаты: $y_0, y_1, y_2, \ldots y_n$.

Раздѣлимъ основаніе первыхъ двухъ элементовъ Ob_1 вычисляемой площади на три равныя части и проведемъ изъ точекъ дѣленія ординаты h_1 и h_2. Если основанія элементарныхъ площадокъ настолько малы, что участки Ak, kl, lb кривой AB могутъ быть приняты за прямые, то будемъ имѣть три трапеціи площади которыхъ будутъ соотвѣтственно равны:

$$(y_0 + h_1)\,\frac{\Delta}{3}\,,\quad (h_1 + h_2)\,\frac{\Delta}{3}\,,\quad (h_2 + y_2)\,\frac{\Delta}{3}$$

Сумма ихъ дастъ площадь двухъ первыхъ элементарныхъ площадокъ

$$[y_0 + 2(h_1 + h_2) + y_2]\,\frac{\Delta}{3} = (y_0 + 4y_1 + y_2)\,\frac{\Delta}{3}$$

такъ какъ

$$h_1 + h_2 = 2y_1.$$

Подобно этому будемъ имѣть для каждой пары площадокъ:

$$(y_2 + 4y_3 + y_4)\,\frac{\Delta}{3}$$

$$(y_4 + 4y_5 + y_6)\,\frac{\Delta}{3}$$

$$(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)\,\frac{\Delta}{3}$$

Сумма всѣхъ этихъ величинъ даетъ всю опредѣляемую площадь $OABC = S$ а именно:

$$S = \frac{\Delta}{3}\,[(y_0 + y_n) + 2(y_2 + y_4 + \ldots y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots y_{n-1})]$$

т. е. площадь данной фигуры равна одной трети произведенія разстоянія между ординатами на сумму крайнихъ ординатъ, удвоенную сумму нечетныхъ ординатъ кромѣ крайнихъ и учетверенную сумму четныхъ ординатъ.

3 Кромѣ этихъ приближенныхъ формулъ площадь какой либо плоской фигуры можетъ быть опредѣлена посредствомъ пріемовъ, описываемыхъ въ низшей геодезіи: палеткой, планиметромъ Амслера *). Наконецъ, можно поступить такъ, начертивъ данную фигуру на толстой, возможно однородной бумагѣ, вырѣзать ее и взвѣсить. Сравнивъ найденный вѣсъ съ вѣсомъ вырѣзаннаго изъ той же бумаги квадрата опредѣленныхъ размѣровъ, мы найдемъ величину площади

97

§ 95. Задачи

1. Зависимость v отъ t указана на фиг 97 Найти а) разстояніе

---

*) Аргамоновъ Курсъ низшей геодезіи изд. 2 Глава VIII Вычисленіе площадей плановъ, стр 175.

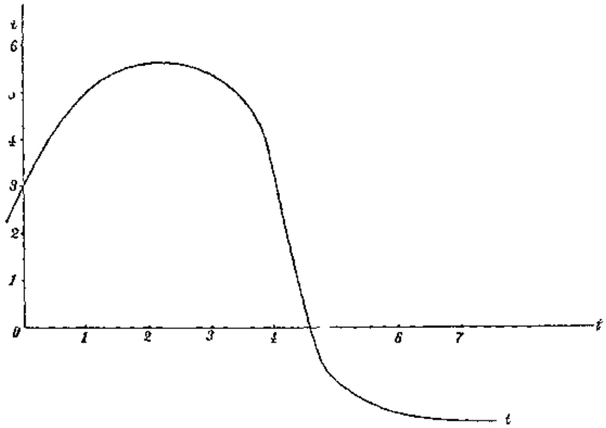
пройденное тѣломъ въ теченіе трехъ секундъ, считая отъ конца первой секунды; б) разстояніе, пройденное въ теченіе шести секундъ, считая отъ начала временъ; в) $s = f(t)$, если $s_0 = ?$

2 Отвѣтить на вопросы, указанные въ предыдущей задачѣ при данныхъ. $s_0 = -1$ и $v = \varphi(t)$ (фиг. 98).

3. Опредѣлено ли движеніе, если имѣемъ: $v = 4t$?

4. Опредѣлено ли движеніе данными: $v = t^2$, $s_0 = 8$?

5. Даны составляющія скорости по осямъ координатъ: $v_x = 3t$, $v_y = 2 + 2t$. а) Найти зависимость координатъ отъ времени.



98

б) Построить траекторію составного движенія предполагая начальныя разстоянія x_0 и y_0 равными нулю.

6 Рѣшить ту же задачу при данныхъ: $v_x = 2$ $v_y = t$; $x_0 = 1$ $y_0 = 0$

Рѣшенія задачъ.

1. а) Разстояніе ($s_4 - s_1$) выражается площадью соотвѣтственнаго участка кривой между ординатами v_1 и v_4; при этомъ площадки, лежащія ниже оси t должны быть взяты со знакомъ минусъ

3. Нѣтъ, такъ какъ не указаны: начальное разстояніе и траекторія (§ 89)

4. Нѣтъ, такъ какъ не указана траекторія (§ 89)

5. а) См § 89 б) См. § 41

ГЛАВА VIII

Опредѣленіе движенія точки по ускоренію

§ 96. Опредѣленіе скорости по ускоренію въ прямолинейномъ движеніи

Обратимся при рѣшеніи предстоящаго вопроса первоначально къ разсмотрѣнію простѣйшаго случая движенія, а именно движенія прямолинейнаго При этомъ, какъ намъ хорошо извѣстно. скорость и ускореніе не измѣняютъ своего направленія, ускореніе выражаетъ быстроту измѣненія скорости только по величинѣ, мы имѣемъ:

$$u = k = \text{пр}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$$

Нашей цѣлью сначала и будетъ опредѣленіе скорости по данной зависимости ускоренія отъ времени т. е.

$$u = k \quad \varphi(t)$$

Имѣя же скорость на основаніи соображеній, изложенныхъ въ предыдущей главѣ мы можемъ вычислить разстояніе точки отъ начала разстояній.

Итакъ, останавливаясь на указанной задачѣ—нахожденіи скорости по данной зависимости ускоренія отъ времени—мы усматриваемъ, что эта задача аналогична только что разсмотрѣнной, касавшейся опредѣленія пройденнаго разстоянія по скорости съ математической же стороны тождественна ей. Дѣйствительно, тамъ мы имѣли данной скорость, выражающуюся въ зависимости отъ разстоянія такъ:

$$v = \text{пр}\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) \text{*)}$$

Здѣсь мы желаемъ найти по данному ускоренію скорость, причемъ ускореніе по скорости находится посредствомъ подобнаго же выраженія

$$k = \text{пр}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$$

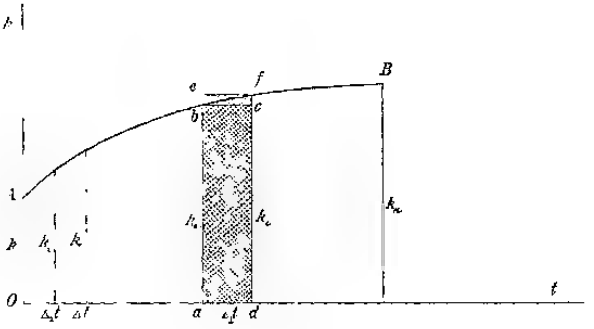
Мы могли бы опираясь на сказанное и не разсматривать совсѣмъ вопроса объ опредѣленіи скорости по ускоренію въ прямолинейномъ

---

*) Т е производной отъ разстоянія по времени (§ 51)

движенія; тѣмъ не менѣе ввиду того обстоятельства, что величины, которыхъ мы касаемся, имѣютъ различное механическое значеніе, выясненіе котораго должно занимать первенствующее мѣсто въ нашемъ изложеніи, мы перейдемъ къ изслѣдованію поставленной задачи, дѣлая при этомъ возможныя сокращенія.

Итакъ пусть будетъ дана зависимость ускоренія отъ времени графически кривой AB, уравненіе которой таково: $k = \varphi(t)$ (фиг. 99), и требуется найти скорость въ концѣ t секундъ отъ начала движенія. Раздѣлимъ для этого время t на элементы $\Delta_1 t$, $\Delta_2 t$, $\Delta_3 t$, ... $\Delta_n t$. Ускоренія въ концахъ ихъ обозначимъ буквами съ соотвѣтствующими значками k_1, k_2, k_3, ... k_n. Разсмотримъ нѣкоторый элементъ $\Delta_i t$ отъ начала движенія; ускореніе въ началѣ его будетъ k_{i-1}, въ концѣ k_i. Предположимъ теперь, что ускореніе въ теченіе этого элемента времени не мѣнялось и было равно наименьшей величинѣ дѣйствительнаго ускоренія въ продолженіе того же элемента времени; въ случаѣ кривой, изображенной на чертежѣ, такимъ будетъ ускореніе въ началѣ разсматриваемаго элемента — k_{i-1}. Тогда движеніе будетъ равноускореннымъ и приращеніе скорости за этотъ элементъ времени выразится площадкой прямоугольника $abcd$ равной



99

$$k_{i-1} \Delta_i t.$$

Если допустимъ, что ускореніе оставалось постоянно равнымъ наибольшему значенію дѣйствительнаго ускоренія въ данный элементъ времени — k_i, то приращеніе скорости будетъ измѣряться площадкой внѣшняго прямоугольника $aefd$ и будетъ равно $k_i \Delta_i t$.

Истинное приращеніе скорости $(v_i - v_{i-1})$ очевидно, заключается между этими двумя величинами, а именно

$$k_{i-1} \Delta_i t < (v_i - v_{i-1}) < k_i \Delta_i t$$

Составляя подобныя же соотношенія для всѣхъ элементовъ времени (подстановкой вмѣсто i по очереди 1 2 3 ... n), будемъ имѣть

$$k_0\Delta_1 t < (v_1 - v_0) < k_1\Delta_1 t \qquad (1)$$

$$k_1\Delta_2 t < (v_2 - v_1) < k_2\Delta_2 t, \qquad (2)$$

$$k_2\Delta_3 t < (v_3 - v_2) < k_3\Delta_3 t \qquad (3)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$k_{n-2}\Delta_{n-1} t < (v_{n-1} - v_{n-2}) < k_{n-1}\Delta_{n-1} t \qquad (n-1)$$

$$k_{n-1}\Delta_n t < (v_n - v_{n-1}) < k_n\Delta_n t \qquad (n)$$

Первыя части этихъ выраженій равны площадкамъ внутреннихъ прямоугольниковъ, послѣднія — площадкамъ внѣшнихъ прямоугольниковъ. Складывая соотвѣтственныя части, находимъ:

$$k_0\Delta_1 t + k_1\Delta_2 t + k_2\Delta_3 t + \ldots k_{n-1}\Delta_n t < (v_n - v_0) <$$
$$< k_1\Delta_1 t + k_2\Delta_2 t + k_3\Delta_3 t + \ldots k_n\Delta_n t$$

или

$$\sum_1^n k_{i-1}\Delta_i t < (v_n - v_0) < \sum_1^n k_i\Delta_i t$$

Дѣйствительное приращеніе скорости $v_n - v_0 = v_t - v$ заключается между указанными суммами, представляющими суммы внутреннихъ и внѣшнихъ прямоугольниковъ; но съ другой стороны между этими же суммами заключается всегда по величинѣ площадь кривой.

При безконечномъ увеличеніи числа элементовъ или, что равнозначно, при безграничномъ уменьшеніи каждаго изъ нихъ, разность между суммами прямоугольниковъ можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины, слѣдовательно, еще меньше будетъ разность между площадью кривой и приращеніемъ скорости — двумя постоянными величинами,—а это ведетъ къ заключенію, что онѣ между собою равны т. е. **приращеніе скорости въ теченіе даннаго промежутка времени въ случаѣ прямолинейнаго движенія выражается площадью, ограниченной кривой ускореній, осью временъ и ординатами, соотвѣтствующими началу и концу даннаго промежутка времени.**

И площадь кривой и приращеніе скорости будутъ предѣлами суммъ площадокъ внѣшнихъ и внутреннихъ прямоугольниковъ, т. е.

$$v_t - v_0 = \text{пр} \sum_1^n k_{i-1}\Delta_i t = \text{пр} \sum_1^n k_i\Delta_i t$$

Или откидывая значки при k и Δt а также у v, замѣняя значки 1 и n у второй сигмы соотвѣтственно черезъ 0 и t получимъ

$$v - v_0 = \text{пр.} \sum_0^t k\Delta t$$

Выраженіе это можетъ быть прочитано совершенно такъ же, какъ это мы имѣли при опредѣленіи приращенія разстоянія по данной скорости *), а именно:

Приращеніе скорости въ теченіе даннаго промежутка времени равно предѣлу суммы произведеній изъ элементовъ времени на ускоренія, имъ соотвѣтствующія.

Говоря: «ускоренія, имъ, т. е. элементамъ времени, соотвѣтствующія», мы подразумѣваемъ, что въ качествѣ таковаго можетъ быть взято ускореніе, соотвѣтствующее любому мгновенію, заключающемуся въ данномъ промежуткѣ или элементѣ; обыкновенно берутъ ускореніе въ конечное мгновеніе даннаго промежутка.

Для нахожденія v нужно кромѣ $k = \varphi(t)$ знать v_0, т. е. начальную скорость.

Опредѣливъ v, легко получимъ и s, если будетъ дано s_0—начальное разстояніе.

Итакъ для опредѣленія движенія должно быть дано: 1) зависимость ускоренія отъ времени, 2) начальная скорость, 3) начальное разстояніе и 4) траекторія движущейся точки.

§ 97. Опредѣленіе скорости по касательному ускоренію въ криволинейномъ движеніи.

Изложеннымъ пріемомъ можетъ быть найдена величина скорости не только въ прямолинейномъ движеніи, но и въ криволинейномъ, если будетъ дано касательное ускореніе и начальная скорость. Измѣненіе скорости по величинѣ во всякомъ движеніи опредѣляется касательнымъ ускореніемъ, причемъ математическая зависимость между касательнымъ ускореніемъ и скоростью въ криволинейномъ движеніи вполнѣ одинакова съ зависимостью между полнымъ ускореніемъ (которому также можетъ быть сохранено названіе касательнаго) и скоростью въ прямолинейномъ движеніи. Поэтому не имѣется необходимости въ какихъ-либо дальнѣйшихъ выводахъ, относящихся до опредѣленія скорости въ криволинейномъ движеніи, и мы можемъ написать:

$$v = v_0 + \text{пр} \sum_0^t k\Delta t$$

При рѣшеніи вопроса путемъ аналитическимъ все дѣло сводится

*) Замѣняя слово -скорость ускореніемъ, а разстояніе—скоростью (§ 89)

къ вычисленію

$$\text{пр} \sum_{0}^{t} k\Delta t$$

— предѣла суммы произведеній элементарныхъ приращеній перемѣнной независимой (времени) на соотвѣтствующія значенія функціи (ускоренія). Примѣняя методъ графическій, придется опредѣлить величину площади, заключающейся между кривой ускореній, осью временъ и ординатами, соотвѣтствующими начальному и конечному мгновеніямъ даннаго промежутка.

§ 98. Опредѣленіе произвольнаго движенія точки посредствомъ проекцій ускоренія на оси координатъ.

Имѣя данными: касательное ускореніе и начальную скорость, мы найдемъ скорость точки только по величинѣ, такъ какъ знаемъ только одну составляющую полнаго ускоренія — ускореніе касательное. Вопросъ о нахожденіи скорости не только по величинѣ, но и по направленію и объ опредѣленіи разстоянія при криволинейномъ движеніи рѣшается наиболѣе просто въ томъ случаѣ, когда ускореніе задано посредствомъ составляющихъ по тремъ взаимноперпендикулярнымъ осямъ, служащимъ траекторіями составляющихъ движеній точки. Въ отдѣльности для каждаго изъ этихъ движеній должно быть дано кромѣ траекторіи, опредѣляемой для каждаго движенія самой осью, Ox Oy или Oz: 1) ускореніе, являющееся проекціей составного ускоренія на эту ось, имѣемъ соотвѣтственно для каждой изъ осей:

$$k_x = \varphi_1(t);\quad k_y = \varphi_2(t);\quad k_z = \varphi_3(t)$$

2) Начальныя скорости, равныя проекціямъ дѣйствительной скорости на соотвѣтственныя оси — v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0}; 3) начальныя разстоянія для каждой изъ осей, — x_0, y_0, z_0.

Въ такомъ случаѣ каждое изъ движеній является вполнѣ опредѣленнымъ; мы найдемъ

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_{x_0} + \text{пр} \sum k_x \Delta t \\ v_y &= v_{y_0} + \text{пр.} \sum k_y \Delta t \\ v_z &= v_{z_0} + \text{пр.} \sum k_z \Delta t, \end{aligned}\right\} \qquad (78)$$

$$\overline{V} = \overline{v_x} + \overline{v_y} + \overline{v_z}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(V\,x) &= \frac{v_x}{V} \\ \cos(V\,y) &= \frac{v_y}{V} \\ \cos(V\,z) &= \frac{v_z}{V}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (79)$$

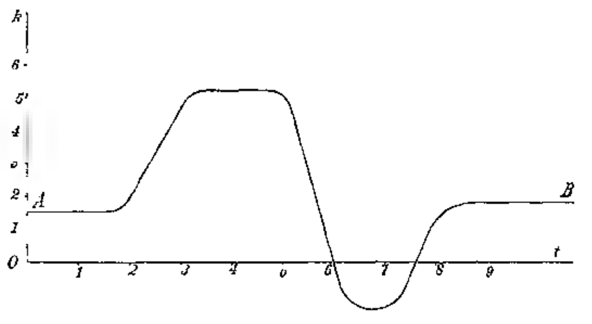
Имѣя же скорости и начальныя разстоянія, найдемъ и разстоянія по каждой изъ осей или координаты точки въ зависимости отъ времени. Слѣдовательно задача будетъ рѣшена

§ 99. Задачи.

1 Два тѣла движутся на встрѣчу другъ другу, одно съ ускореніемъ въ 0,2 фут./сек.^{2}, другое съ ускореніемъ 0,5 фут./сек.^{2} Ихъ первоначальное разстояніе 1 верста. По истеченіи какого времени они встрѣтятся?

2. Тѣло движется съ ускореніемъ въ ? м. сек^2 Найти скорость его и разстояніе, какъ функціи времени.

3. Ордината кривой ускореній въ прямолинейномъ движеніи равна нулю: что въ это мгновеніе имѣется на кривой скоростей?



100

4 Даны проекціи ускоренія по осямъ. $k_x = -4$ $k = t$ $k = 0$

а) Опредѣлить родъ движенія по каждой оси.

б) Что еще должно быть дано для опредѣленія зависимости координатъ отъ времени?

5. Дана линія касательныхъ ускореній AB (фиг. 100) а) Построить соотвѣтствующія кривыя скоростей и разстояній при данныхъ:

$$v_0 = 1, \quad s_0 = 0$$

б) Опредѣлить характеръ движенія въ теченіе промежутковъ времени, отвѣчающихъ прямолинейнымъ участкамъ линіи ускореній.

6 Дано:

$$1) \quad k_x = 4 \quad v_{x_0} = 0 \quad x_0 = 0$$

$$2) \quad k_y = 0 \quad v_{y_0} = 2 \quad y_0 = -2$$

а) Опредѣлить v_x, v_y, V и x, y

б) Найти положеніе точки въ концѣ третьей секунды

Рѣшенія задачъ:

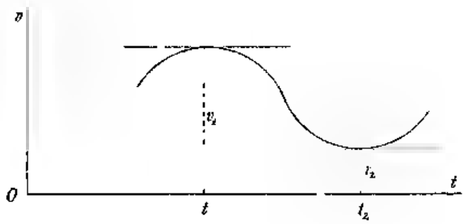
1 Промежутокъ времени до встрѣчи тѣлъ найдется изъ уравненія:

$$\frac{k_1 t^2}{2} + \frac{k_2 t^2}{2} = 3500$$

гдѣ $k_1 = 0,2$, $k_2 = 0,5$.

2. $v = v_0 + 2t$; $s = s_0 + v_0 t + t^2$ (см. § 79).

3 Касательная къ кривой скоростей параллельна оси временъ скорость въ это мгновеніе имѣетъ по сравненію со смежными значеніями (фиг. 101) наибольшую (v_1) или наименьшую (v_2) величину.



101

4. а) Ось Ox — равнозамедленное, Oy — ускоренное, Oz — равномѣрное.

б) Начальныя скорости по осямъ и начальныя разстоянія

5. а) См. § 97 и § 92.

6 а) $v_x = 4t$; $v_y = 2$; $x = 2t^2$; $y = 2t - 2$

§ 100. Перечень способовъ опредѣленія движенія точки

Изложенное въ двухъ послѣднихъ главахъ позволяетъ къ ранѣе разсмотрѣннымъ способамъ заданія или опредѣленія движенія:

1) траекторіей и зависимостью разстоянія отъ времени и

2) составляющими движеніями,

прибавить еще два.

3) траекторіей, скоростью и начальнымъ разстояніемъ,

4) траекторіей, ускореніемъ, начальной скоростью и начальнымъ разстояніемъ въ прямолинейномъ движеніи или перечисленными данными для каждаго изъ трехъ взаимноперпендикулярныхъ прямолинейныхъ движеній въ общемъ случаѣ движенія точки.

Какимъ бы изъ указанныхъ способовъ ни было опредѣлено движеніе точки, мы всегда будемъ въ состояніи, пользуясь изложенными въ кинематикѣ точки соотношеніями между разстояніями, скоростями и ускореніями, найти по однимъ изъ этихъ величинъ другія при наличіи необходимаго количества данныхъ. Задача кинематики, какъ и всякаго другого отдѣла математической физики, и сводится къ отысканію и установленію зависимостей, существующихъ между перечисленными величинами. Только послѣ установленія такихъ **количественныхъ** соотношеній и можно говорить о точномъ выраженіи и изученіи явленій природы

ГЛАВА IX

Движеніе тѣлъ брошенныхъ *)

§ 101. Общія замѣчанія.

Изложивъ общія основанія кинематики точки, перейдемъ къ разсмотрѣнію нѣкоторыхъ наиболѣе замѣчательныхъ частныхъ видовъ движеній; къ такимъ могутъ быть отнесены движеніе тѣлъ падающихъ и брошенныхъ въ пустотѣ и гармоническое движеніе. Въ настоящей главѣ мы разсмотримъ первое. Примѣненіе выводовъ, относящихся къ движенію точки, къ случаю движенія тѣла можетъ быть сдѣлано на основаніи замѣчанія, указаннаго въ § 4.

Такъ какъ сущность содержанія настоящей главы будетъ носить характеръ примѣненія общихъ выраженій разстоянія, скорости и ускоренія къ движенію тѣлъ падающихъ, что могло бы быть сдѣлано самими читателями въ видѣ упражненій, то мы, не повторяя общихъ разсужденій, будемъ возможно краткими въ изложеніи.

На основаніи законовъ свободнаго паденія тѣлъ въ пустотѣ, открытыхъ Галилеемъ, можно заключить, что падающія тѣла движутся съ постояннымъ по величинѣ и направленію ускореніемъ; ускореніе это, называемое ускореніемъ свободно падающаго тѣла (или ускореніемъ силы тяжести) и обозначаемое обыкновенно буквою g, направлено по вертикали внизъ; величина его, будучи перемѣнной въ различныхъ мѣстахъ земной поверхности, въ средней широтѣ можетъ быть принята равной

$$9{,}81\ \frac{\text{метр.}}{\text{сек.}^2} = 32{,}2\ \frac{\text{фут.}}{\text{сек.}^2}.$$

§ 102. Движеніе тѣлъ, брошенныхъ внизъ.

Тѣло, брошенное внизъ, движется по прямой линіи съ ускореніемъ g; мы будемъ, слѣдовательно, имѣть случай прямолинейнаго равноускореннаго движенія, а потому безъ дальнѣйшихъ оговорокъ

*) Разсматриваемому въ настоящей главѣ движенію тѣлъ можетъ быть присвоено общее заглавіе движенія тѣлъ подъ дѣйствіемъ силы тяжести; но такъ какъ всѣ вопросы здѣсь разсмотрѣны чисто кинематически, то такое наименованіе въ общей послѣдовательности курса было бы преждевременнымъ.

можемъ примѣнить сюда найденныя выше уравненія (§ 79). Замѣнивъ въ нихъ k и w черезъ g, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 + gt \\ s &= s_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (80)$$

гдѣ v_0 и s_0 суть соотвѣтственно начальная скорость, съ которой брошено тѣло, и начальное разстояніе.

Въ частномъ случаѣ, если v_0 и s_0 равны нулю, имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} v &= gt \\ s &= \frac{gt^2}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (81)$$

Въ эти два уравненія входятъ три перемѣнныхъ величины: t, v и s; достаточно знать одну изъ нихъ, чтобы найти двѣ прочихъ. Такъ напр. если дана скорость v, то s въ зависимости отъ нея выразится такъ:

$$s = \frac{g}{2}\left(\frac{v}{g}\right)^2 = \frac{v^2}{2g}, \qquad (82)$$

а время паденія

$$t = \frac{v}{g}$$

Если будемъ имѣть данной s, то

$$\left.\begin{aligned} v &= \sqrt{2gs} \\ t &= \sqrt{\frac{2s}{g}} \end{aligned}\right\} \qquad (83)$$

§ 103. Движеніе тѣлъ, брошенныхъ вверхъ.

Пусть тѣло брошено вверхъ съ начальной скоростью v_0. Движеніе его въ этомъ случаѣ будетъ равнозамедленнымъ, т. е. тѣло будетъ двигаться вверхъ съ ускореніемъ, равнымъ $-g$, а потому мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 - gt \\ s &= s_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (84)$$

Если же начало разстояній совпадетъ съ точкой бросанія, какъ это обыкновенно и принимаютъ, то $s_0 = 0$, и мы получимъ

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 - gt \\ s &= v_0 t - \frac{gt^2}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (85)$$

§ 104. Задачи.

1. Найти скорость тѣла, упавшаго съ высоты 80 метр., и время паденія его.

2. Два тѣла начали падать черезъ b секундъ одно послѣ другого. Найти время, по истеченіи котораго они будутъ находиться на разстояніи a метр.?

Численныя данныя $b = 5$, $a = 120$.

3. Черезъ 3 секунды послѣ паденія тѣло пріобрѣло скорость 34,43 м./сек. Обладало ли оно начальной скоростью и какъ велика была послѣдняя?

4. Опредѣлить глубину колодца h если звукъ отъ паденія камня на дно его слышенъ черезъ t сек. Скорость звука равна a.

Численныя данныя. $t = 25$ сек., $a = 340$ м./сек.

5. Съ высоты h падаютъ двѣ частицы воды, при чемъ первая прошла уже путь въ a мм., когда вторая только что начала падать. Найти разстояніе между частицами въ то мгновеніе, когда первая пройдетъ указанную высоту h.

Численныя данныя. $h = 400$ м., $a = 0{,}001$ мм.

6. Паровой молотъ имѣетъ подъемъ въ 1,25 метра; принимая, что время для подъема вдвое больше времени для паденія сколько ударовъ можетъ сдѣлать молотъ въ 1 минуту?

Примѣчаніе. Молотъ предполагается свободно падающимъ

7 Два тѣла падаютъ одновременно изъ одного и того же пункта. Первое, пройдя разстояніе въ 36 м., встрѣчаетъ неподвижный предметъ, на которомъ и остается; второе падаетъ на землю спустя послѣ этого еще одну секунду. Найти разстояніе предмета отъ земли

8. Тѣло брошено вверхъ со скоростью 196,2 м сек. Какова его скорость черезъ 15 сек.?

9. Тѣло, брошенное вверхъ, возвратилось въ точку бросанія черезъ 30 сек Найти скорость, съ которой оно было брошено.

10 Найти время поднятія тѣла, брошеннаго со скоростью v_0 до высшей точки полета.

11. Найти высоту поднятія тѣла, брошеннаго вверхъ со скоростью v_0.

12. Найти время по истеченіи котораго тѣло возвратится въ точку бросанія.

13. Найти скорость тѣла, брошеннаго вверхъ со скоростью v_0 при возвращеніи его въ точку бросанія.

14 Черезъ сколько секундъ встрѣтятся два тѣла, изъ которыхъ одно брошено вверхъ со скоростью v_0, а другое падаетъ, не имѣя начальной скорости съ высоты h м? Рѣшить вопросъ графически

Рѣшенія задачъ.

1 Для рѣшенія вопроса имѣемъ два уравненія: $s = \frac{gt^2}{2}$ и $v = gt$, въ которыхъ извѣстны: $s = 80$ м. и $g = 9{,}8$ м./сек.^{2} ($\backsim 10$ м./сек.^{2})

2. Если позже брошенное тѣло находилось въ движеніи t сек., то разстоянія, пройденныя каждымъ изъ тѣлъ, будутъ соотвѣтственно. $s' = \frac{g(t+\theta)^2}{2}$ и $s'' = \frac{gt^2}{2}$. По условію имѣемъ $s' - s'' = a$ откуда и найдемъ два значенія для t.

Примѣчаніе. Объяснить значеніе обоихъ значеній для t.

3. Изъ уравненія $v = v_0 + gt$ гдѣ $t = 3$ сек. $v = 34{,}43$ м./сек., находимъ $v_0 = 5$ м./сек.

Примѣчаніе. Если въ видахъ упрощенія выкладокъ и возможно округлять иногда цифры, напр. брать g равнымъ 10 вмѣсто 9,8 или 9,81 (ошибка въ $2^0/_0$), то въ этомъ отношеніи каждый разъ слѣдуетъ сообразоваться съ данными. Въ настоящемъ случаѣ, когда v задано съ точностью до сотыхъ долей метра, только что указанное округленіе цифръ, очевидно, недопустимо.

4. $h = a \cdot \frac{gt + a - \sqrt{2agt + a^2}}{g}$. Численныя данныя $h = 1870$ м.

5. $x = 2\sqrt{ah} - a = \infty 40$ мм.

Примѣчаніе. Предложенная задача даетъ отвѣтъ на вопросъ, почему при высокихъ водопадахъ струя ихъ обращается въ концѣ паденія въ водяную пыль.

6. Время паденія t находимъ изъ уравненія $s = \frac{gt^2}{2}$. Число ударовъ $n = \frac{60 \text{ сек.}}{t + 2t} = \frac{20}{t}$.

7. 31,48 м.

8. $v_{15} = 49{,}05$ м./сек. (§ 103).

9. $v_0 = 245{,}25$ м. сек. (см. зад. 10 и 12).

10. Скорость v тѣла въ высшей точкѣ полета равна нулю, а потому пользуясь уравненіемъ (85), получимъ:

$$v_0 - gt = 0$$

откуда

$$t = \frac{v_0}{g}$$

11. Высота эта будетъ соотвѣтствовать времени $t = \frac{v_0}{g}$ (предыд. зад.), необходимому для поднятія тѣла, а потому вставляя значеніе его въ выраженіе для s (у-ніе 85), получимъ:

$$s = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}$$

12. Для этого имѣемъ

$$s = 0$$

а потому (уравненіе 85):

$$v_0 t - \frac{gt^2}{2} = t\left(v_0 - \frac{gt}{2}\right) = 0$$

Это возможно при $t = 0$, что отвѣчаетъ мгновенію бросанія, и при $v_0 = \frac{gt}{2}$, откуда $t = \frac{2v_0}{g}$, т. е. искомое время вдвое болѣе времени, необходимаго для поднятія (зад. 10).

13. Высота подъема тѣла равна

$$\frac{v_0^2}{2g}$$

(зад. 11); для обратнаго же паденія его, примѣняя уравненія (81), имѣемъ

$$s = \frac{v^2}{2g}.$$

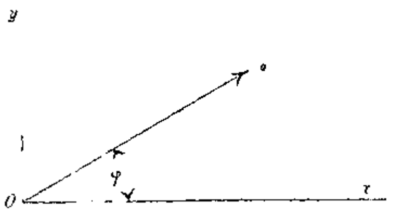
Но такъ какъ разстоянія, пройденныя имъ вверхъ и внизъ, равны между собою, то заключаемъ, что $v = v_0$, т. е. скорость при возвращеніи тѣла въ точку бросанія численно равна скорости бросанія.

14. $t = \frac{h}{v}$.

§ 105. Движеніе тѣлъ, брошенныхъ подъ угломъ къ горизонту.

Пусть тѣло брошено съ начальной скоростью v_0 подъ угломъ φ къ горизонту (фиг. 102): уголъ φ называютъ угломъ бросанія. Имѣя эту скорость, тѣло будетъ двигаться равномѣрно по направленію скорости согласно закону разстояній

$$= v_0 t$$



102

и въ то же время будетъ имѣть другое движеніе по вертикальной линіи съ постояннымъ ускореніемъ g, направленнымъ внизъ. Если положительныя разстоянія будемъ откладывать по вертикали вверхъ, то для разстояній, проходимыхъ подъ дѣйствіемъ тяжести, будемъ имѣть $-\frac{gt^2}{2}$.

Замѣнимъ первое изъ этихъ движеній двумя другими, равноцѣнными ему и направленными по вертикальному и горизонтальному направленіямъ, другими словами, разложимъ первое изъ движеній на два составляющихъ по осямъ Ox и Oy. Въ такомъ случаѣ будемъ имѣть слѣдующія зависимости разстояній отъ времени (координатъ отъ времени)

$$y = v_0 \sin\varphi \cdot t$$
$$x = v_0 \cos\varphi \cdot t$$

гдѣ значки у y и x показываютъ, что мы имѣемъ въ виду лишь составное движеніе со скоростью v_0

Присоединяя къ y еще движеніе вслѣдствіе силы тяжести и откидывая значекъ у x, окончательно получимъ

$$\left.\begin{aligned} y &= v_0 \sin\varphi \cdot t - \frac{gt^2}{2} \\ x &= v_0 \cos\varphi \cdot t \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

Эти уравненія и могутъ служить для рѣшенія всѣхъ вопросовъ относительно движенія въ пустотѣ тѣлъ, брошенныхъ съ произвольно направленной начальной скоростью, напр. артилерійскихъ снарядовъ. Мы видимъ, что движеніе по горизонтальному направленію будетъ равномѣрнымъ со скоростью $v_0 \sin\varphi$, а по вертикальному равнозамедленнымъ съ ускореніемъ — g.

Послѣднія уравненія заключаютъ въ себѣ пять перемѣнныхъ величинъ: y, x, v_0, φ и t; слѣдовательно, для опредѣленнаго рѣшенія вопроса должны быть даны три изъ нихъ.

Частные случаи, соотвѣтствующіе различнымъ значеніямъ угла бросанія, будутъ слѣдующіе:

1) Тѣло брошено по вертикали вверхъ. $\angle\varphi = 90^\circ$ имѣемъ:

$$y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

$$(x = 0),$$

т. е. уравненіе, найденное въ предыдущемъ параграфѣ (85).

2) Тѣло брошено по горизонтальному направленію $\angle\varphi = 0$

$$y = -\frac{gt^2}{2},$$

$$x = v_0 t.$$

Если же положительное направленіе y примемъ внизъ отъ точки бросанія, то будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{gt^2}{2} \\ x &= v_0 t \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

Общія выраженія (86) по исключеніи изъ нихъ времени t даютъ уравненіе траекторіи. Опредѣливъ изъ второго уравненія значенія t и t^2 и вставивъ ихъ въ первое, получимъ:

$$y = x\, tg\,\varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\varphi} \tag{88}$$

Траекторія представляетъ собою параболу—кривую, свойства которой изучаются въ аналитической геометріи.

Видъ ея мы можемъ опредѣлить, построивъ ее непосредственно по точкамъ. Для простоты вычисленій съ этой цѣлью можно воспользоваться выраженіями (87); въ этомъ случаѣ мы получимъ точно также параболу, но нѣсколько иначе расположенную Высшая точка ея, называемая вершиною, будетъ лежать въ точкѣ бросанія. Вертикальная линія, проведенная черезъ вершину, раздѣляетъ параболу на двѣ симетричныя вѣтви и потому называется осью параболы.

Проекціи дѣйствительной скорости на оси Ox и Oy въ общемъ случаѣ (выраженія 86) будутъ:

$$\left.\begin{aligned} v_y &= v_0 \sin\varphi - gt \\ v_x &= v_0 \cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

Точно такъ же для ускореній найдемъ

$$\left.\begin{aligned} w_y &= k_y = -g \\ w_x &= k_x = 0 \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

§ 106. Задачи.

1 Найти время, въ теченіе котораго тѣло, брошенное со скоростью v_0 подъ угломъ бросанія φ, придетъ на горизонтъ точки бросанія Численныя данныя: $\varphi = 25°$, $v_0 = 10$ м.

2. Найти дальность полета тѣла, брошеннаго подъ угломъ φ со скоростью v_0

3. Найти уголъ бросанія, при которомъ дальность полета тѣла, брошеннаго со скоростью v_0, будетъ наибольшей.

4. Найти скорость, съ которой тѣло брошенное подъ угломъ φ приходитъ на горизонтъ бросанія.

5. Достижима ли при начальной скорости 1? м/сек дальность полета въ 25 м?

6. Почему горизонтально брошенное тѣло достигаетъ точки, лежащей на извѣстной глубинѣ, въ тотъ же промежутокъ времени, какъ и при свободномъ паденіи?

7 Почему дальности полета двухъ тѣлъ, брошенныхъ съ одинаковой скоростью, равны между собою, если углы бросанія дополняютъ другъ друга до 90°?

8. Какую начальную скорость долженъ имѣть снарядъ, выпущенный подъ угломъ возвышенія въ 45°, если онъ долженъ попасть въ цѣль, находящуюся ниже точки вылета на 100 метр и на горизонтальномъ удаленіи въ 900 метр

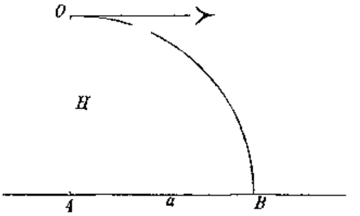
9. Найти наибольшую дальность полета снаряда брошеннаго въ пустотѣ съ начальною скоростью въ 1500'.

10. Какъ измѣнится дальность при данныхъ предыдущей задачи, если уголъ возвышенія уменьшить на α? Изслѣдовать полученное рѣшеніе, построивъ кривую: $x = f(\alpha)$.

11. Какъ измѣнится дальность, если начальную скорость уменьшить на a м./сек.? Изслѣдовать полученное рѣшеніе, построивъ зависимость: $x = f(v_0)$.

12. Снарядъ выпущенъ изъ орудія съ начальною скоростью въ 2000' подъ угломъ 20° къ горизонту. Съ какою скоростью надо бросить его, чтобы при углѣ въ 16° получилась та же горизонтальная дальность?

13. Съ какой высоты H должно быть брошено тѣло съ горизонтальной скоростью v_0 для того, чтобы оно упало на землю въ точкѣ B, удаленной отъ точки A (проекціи точки O) на разстояніе a? (фиг. 103)



103.

14. Строеніе, находящееся на разстояніи 1200 м., обстрѣливается подъ угломъ бросанія въ 30°.

а) Найти начальную скорость v_0.

б) Найти время t полета снаряда.

в) Найти наибольшую высоту h подъема снаряда.

г) Найти скорость v, съ которой снарядъ попадетъ въ цѣль.

15. Тѣло брошено по горизонтальному направленію со скоростью 40 м./сек.

а) Построить по точкамъ траекторію снаряда.

б) Найти уравненіе траекторіи.

в) Опредѣлить величину и направленіе скорости въ концѣ 4-ой секунды.

г) Найти величину и направленіе ускоренія въ это мгновеніе.

16. Изъ точки A проведено произвольное число наклонныхъ плоскостей (фиг. 104). По каждой изъ нихъ въ плоскости чертежа катится безъ тренія по шарику. Найти кривую, по которой будутъ расположены послѣдніе въ одно и то же мгновеніе.

104

17. Рѣшить задачи, аналогичныя задачамъ 10—13 параграфа 104.

Рѣшенія задачъ.

1. Разстояніе тѣла по оси Oy до начала координатъ (точки бросанія) для указаннаго мгновенія будетъ равно нулю, т. е.

$$y = v_0 \sin\varphi \cdot t - \frac{gt^2}{2} = 0 = t\left(v_0 \sin\varphi - \frac{gt}{2}\right),$$

откуда

$$v_0 \sin\varphi - \frac{gt}{2} = 0$$

$$= \frac{2v_0 \sin\varphi}{g},$$

т. е. время это вдвое болѣе того которое тѣло затрачиваетъ на подъемъ до высшей точки траекторіи.

2. Дальностью полета называютъ горизонтальное разстояніе между точкою бросанія и точкою прихода тѣла на горизонтъ бросанія.

Для этого въ выраженіе $x = v_0 \cos\varphi \cdot t$ (у-ніе 86), куда входитъ не извѣстная величина времени t, слѣдуетъ вмѣсто нея вставить значеніе, найденное въ предыдущемъ примѣрѣ, а именно

$$\frac{2v_0 \sin\varphi}{g};$$

тогда получимъ

$$x = v_0 \cos\varphi \frac{2v_0 \sin\varphi}{g} = \frac{v_0^2}{g} 2 \sin\varphi \cos\varphi = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}.$$

3. Дальность полета какъ указано въ предыдущей задачѣ опредѣляется выраженіемъ

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}$$

Значеніе x при данной величинѣ v_0 будетъ наибольшимъ тогда, когда $\sin 2\varphi$ будетъ имѣть наибольшее значеніе, равное 1: при этомъ $\varphi = 45^\circ$ что и будетъ отвѣтомъ на поставленный вопросъ.

Примѣчаніе. Примѣнить ходъ рѣшенія, основанный на соображеніяхъ § 78; при этомъ нужно считать $x = f(\varphi)$.

4. Скорость v тѣла въ любой точкѣ траекторіи найдется изъ выраженія:

$$\begin{aligned} v^2 &= v_x^2 + v_y^2 = \\ &= v_0^2 \cos^2\varphi + (v_0 \sin\varphi - gt)^2 = \\ &= v_0^2 (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) - 2v_0 gt \sin\varphi + g^2t^2 = \\ &= v_0^2 - 2g\left(v_0 t \sin\varphi - \frac{gt^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Но

$$v_0 t \sin\varphi - \frac{gt^2}{2} = y$$

слѣдовательно

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gy}.$$

Когда тѣло придетъ на горизонтъ бросанія $y = 0$ а потому

$$v = \text{абс. вел. } (v_0)$$

т. е. искомая скорость равна по абсолютной величинѣ начальной скорости v_0.

5. Наибольшая дальность полета $x = \frac{v_0^2}{g}$ (задача 3), откуда для $v_0 = 12$ находимъ приблизительно 14,7 м.

6. Въ обоихъ случаяхъ $y = \frac{gt^2}{2}$.

7. Дальности полетовъ:

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g} \text{ и } x = \frac{v_0^2 \sin 2(90 - \varphi)}{g}$$

Но

$$\sin 2\varphi = \sin (180 - 2\varphi) = \sin 2 (90 - \varphi)$$

9. $x_{max} = \infty$ 20 вер.

10. $x = \frac{v_0^2 \sin 2 (45 - \alpha)}{g} = x_{max} \sin (90 - 2\alpha)$

11. $x = \frac{(v_0 - a)^2}{g} = x_{max} \left(\frac{v_0 - a}{v_0}\right)^2$.

13. Изъ уравненій (§ 102) $x = v_0 t$ и $y = \frac{gt^2}{2}$, гдѣ $x = a$, $y = H$ находимъ H, исключая t; $H = \frac{ga^2}{2v_0^2}$.

14. а) $v_0 = 116,6$ м./сек.; б) $t =$ почти 12 сек.; в) $h = 173,91$ м; г) $v = v_0$ (задача 4).

16. Ускореніе шарика, движущагося по плоскости AB, $k = g \cos \varphi$. Въ t сек. онъ пройдетъ разстояніе

$$s = \frac{kt^2}{2} = \frac{gt^2}{2} \cos \varphi$$

Искомая кривая будетъ кругъ съ діаметромъ $\frac{gt^2}{2}$, что не трудно повѣрить графически.

Примѣчаніе. Послѣднее выраженіе есть полярное уравненіе круга.

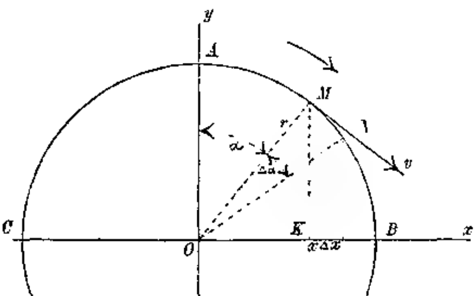
ГЛАВА X

Колебательныя движенія (гармоническія)

§ 107. Понятіе о колебательномъ движеніи Гармоническое движеніе

Для того, чтобы составить себѣ понятіе о происхожденіи колебательнаго движенія, представимъ точку, движущуюся равномѣрно по окружности (фиг 105) начиная отъ A по направленію, указанному стрѣлкой.

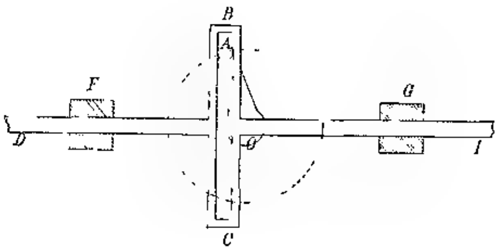
Движеніе точки по окружности можетъ быть разложено на два составляющихъ движенія по осямъ Ox и Oy, проведеннымъ черезъ центръ круга. Каждое изъ этихъ движеній является вмѣстѣ съ тѣмъ движеніемъ проекціи движущейся точки по соотвѣтственной оси. Разсмотримъ движеніе одной изъ проекцій точки, напр. проекціи на ось Ox. Легко видѣть, что по мѣрѣ того, какъ движущаяся точка изъ положенія A будетъ перемѣщаться по направленію, указанному стрѣлкой, проекція ея на ось Ox будетъ двигаться вправо отъ точки O. Когда точка, пройдя первую четверть окружности, начнетъ движеніе по второй четверти ея, проекція пойдетъ по обратному направленію къ точкѣ O, затѣмъ направится влѣво отъ центра круга къ C и наконецъ, съ возвращеніемъ точки движущейся по окружности, въ первоначальное положеніе A, проекція возвратится въ центръ круга O Такимъ образомъ она будетъ перемѣщаться взадъ и впередъ между точками B и C, совер



105

шая колебанія между ними. Размахъ или амплитуда колебанія будетъ равна діаметру BC. Центру круга O присваивается названіе центра колебаній. Время, въ теченіе котораго проекція совершитъ полный размахъ, т. е. возвратится въ начальное положеніе, называется періодомъ колебанія.

Разсмотрѣнное колебательное движеніе можетъ быть произведено слѣдующимъ путемъ (фиг. 106): укрѣпимъ на валу O рукоять A съ плечомъ AO. Конецъ рукоятки вставимъ въ рамку, снабженную стержнями D и E, скользящими въ пазахъ F и G. Вращая равномѣрно рукоять, мы и получимъ описанное колебательное движеніе,



106

которому присваиваютъ названіе гармоническаго движенія. Это движеніе мы и разсмотримъ далѣе.

Важное значеніе гармоническаго движенія въ физикѣ ясно изъ того, что законамъ его слѣдуютъ частицы эфира, конецъ камертона, колеблющаяся струна; послѣднее и дало основаніе назвать разсматриваемое движеніе гармоническимъ.

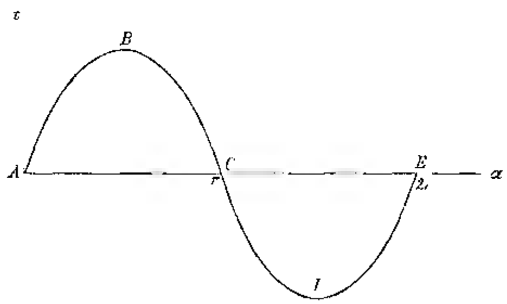
§ 108. Зависимость между разстояніемъ и временемъ въ гармоническомъ движеніи.

Изъ чертежа (фиг. 105) усматриваемъ, что

$$x = r \sin \alpha \quad \ldots \qquad (91)$$

гдѣ r — радіусъ круга, называемый также радіусомъ векторомъ. Послѣдняя формула показываетъ, что величина пройденнаго проекціею точки разстоянія по оси Ox измѣняется пропорціонально $\sin$ угла между радіусомъ-векторомъ и перпендикуляромъ къ оси Ox. Разстояніе x вмѣстѣ съ тѣмъ равно проекціи радіуса-вектора на направленіе разсматриваемаго прямолинейнаго движенія. Написанное выраженіе можетъ быть представлено для наглядности графически въ осяхъ координатъ, причемъ по оси абсциссъ будутъ откладываться углы α или, что тоже, величины дугъ, пройденныхъ концомъ радіуса вектора, а по оси ординатъ — разстоянія проекціи движущейся точки отъ центра колебаній (фиг. 107).

Мы получимъ кривую, называемую синусоидой. Кривая эта состоитъ изъ двухъ симметричныхъ вѣтвей ABC и CDE. Синусоида вмѣстѣ съ тѣмъ выражаетъ зависимость между x и временами колебаній, такъ какъ отложенныя по оси абсциссъ углы пропорціональны временамъ вслѣдствіе равномѣрности движенія точки по кругу. Такимъ образомъ мы будемъ имѣть зависимость между разстояніемъ и временемъ. Кривая же, выражающая эту зависимость, будетъ кривой разстояній. Уголъ поворота радіуса-вектора отъ начальнаго



107

направленія, опредѣляющій положеніе движущейся точки, носитъ названіе фазы. Такимъ образомъ для мгновенія, когда точка находится въ положеніи A, фаза точки равна нулю. Для другихъ положеній движущейся точки фаза опредѣлится такъ:

Обозначая время полнаго оборота (періода) черезъ T а время, соотвѣтствующее повороту радіуса-вектора на уголъ α или что то же соотвѣтствующее данной фазѣ α, черезъ t, получимъ

$$\frac{\alpha}{t} = \frac{2\pi}{T} = \omega$$

гдѣ ω — угловая скорость. Отсюда

$$\alpha = \frac{2\pi t}{T} = \omega t \qquad (92)$$

Если n будетъ число оборотовъ радіуса-вектора въ секунду (число періодовъ), то

$$n = \frac{1}{T},$$

$$\alpha = 2\pi n t \qquad (93)$$

Для t равнаго послѣдовательно

$$0,\ \frac{1}{4}T,\ \frac{2}{4}T,\ \frac{3}{4}T,\ T$$

имѣемъ соотвѣтственно значенія фазы равныя

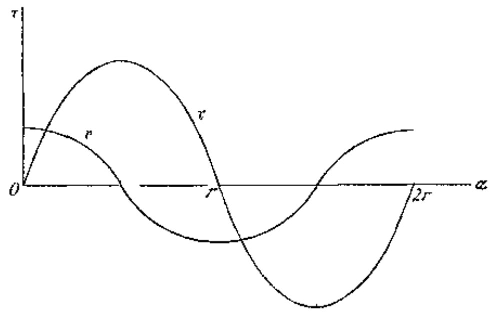
$$0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{4}\pi,\ 2\pi$$

Для разстоянія x, пользуясь выраженіями (91) и (93) получимъ

$$x = r \sin 2\pi n t = r \sin \omega t \tag{94}$$

§ 109. Скорость и ускореніе.

Найдемъ скорость и ускореніе въ колебательномъ движеніи, которое совершаетъ проекція точки движущейся равномѣрно по окруж-



108

ности. Скорость будетъ равна проекціи скорости точки, т. е.

$$v_x = v \cos \alpha$$

Но для v имѣемъ (выраженіе 30 § 57)

$$v = r\omega$$

а потому

$$v_x = r\omega \cos \omega t \tag{95}$$

Представивъ зависимость между v_x и t графически, мы опять получимъ синусоиду, которая можетъ быть названа синусоидой скоростей; но синусоида эта будетъ сдвинута относительно синусоиды разстояній на $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ (фиг. 108). Тамъ, гдѣ проекція удаляется на наибольшую абсолютную величину отъ центра колебаній, скорость равна нулю и наоборотъ, наибольшей величины скорость достигаетъ при прохожденіи проекціей центра.

Найдемъ теперь ускореніе колеблющейся точки, которое будетъ равно проекціи полнаго ускоренія движущейся точки. Но послѣднее равно нормальному ускоренію ея, такъ какъ точка движется равномѣрно т. е

$$w = w_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2$$

а потому

$$w_x = \quad = w \cos(n, Ox) = r\omega^2 \sin \alpha = x\omega^2 \qquad (96)$$

Изъ этого выраженія, въ которомъ ω — величина постоянная усматриваемъ, что ускореніе измѣняется пропорціонально разстоянію проекціи точки отъ центра колебаній. Изъ приведенныхъ формулъ видимъ, что когда скорость равна нулю, ускореніе имѣетъ наибольшую величину и наоборотъ.

Соотношеніе между скоростью и ускореніемъ, подобное соотношенію между разстояніемъ по оси x и скоростью по той же оси, является вполнѣ естественнымъ, такъ какъ мы имѣемъ дѣло съ синусоидальными функціями Такъ какъ производная отъ $\sin t$ есть $\cos t$, то наименьшему значенію перваго соотвѣтствуетъ наибольшее значеніе второго и наоборотъ.

Опредѣлимъ время T полнаго колебанія Имѣемъ

$$vT = 2\pi r,$$

$$T = \frac{2\pi r}{v}.$$

Но

$$\frac{v}{r} = \omega = \sqrt{\frac{w_x}{x}},$$

а потому

$$T = \frac{2\pi r}{r\omega} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{x}{w_x}}.$$

Но какъ мы только что видѣли, отношеніе $\frac{w_x}{x}$ есть величина постоянная ее называютъ коефиціентомъ ускоренія Обозначая коефиціентъ ускоренія черезъ p, получимъ:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{p}}.$$

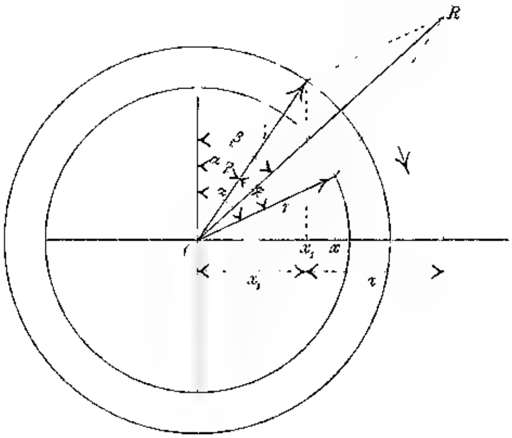
Слѣдовательно періодъ колебанія не зависитъ отъ амплитуды а лишь отъ коефиціента ускоренія.

§ 110. Сложеніе двухъ гармоническихъ движеній

Найдемъ теперь движеніе точки, которая будетъ имѣть одновременно два гармоническихъ движенія, изъ которыхъ одно опредѣляется проекціей радіуса-вектора r, а другое — проекціей радіуса-вектора r_1, вращающагося съ той же угловой скоростью, но отстающаго отъ перваго по фазѣ на уголъ φ (фиг. 109). Въ такомъ случаѣ разстояніе x

точки отъ центра колебанія опредѣлится суммой:

$$X = x + x_1 = r \sin \alpha + r_1 \sin (\alpha - \varphi) \qquad (97)$$



109

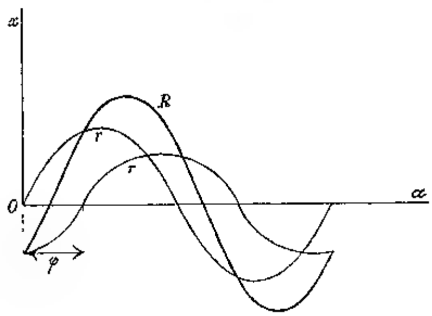
Если мы сложивъ геометрически радіусы r и r_1 найдемъ проекцію суммы ихъ

$$R = r +$$

на ось колебаній Ox, то получимъ

$$R \sin \alpha = r \sin \alpha + r_1 \sin (\alpha - \varphi) \qquad (98)$$

т. е. X равно проекціи R на ось Ox. Такъ какъ при постоянныхъ длинахъ r и r_1 и постоянной величинѣ угла φ между ними и R будетъ постоянной, то мы видимъ, что составное колебательное движеніе будетъ также совершаться по синусоидальному закону



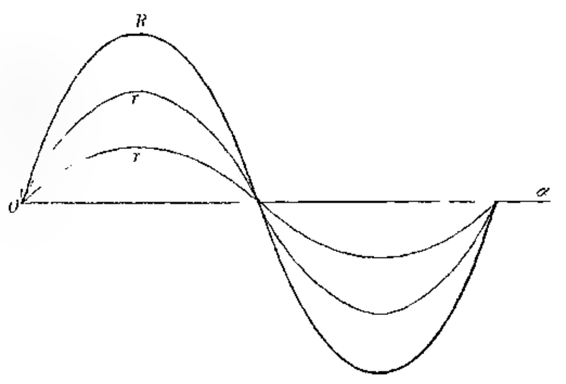
110.

Въ фиг 110 представлены синусоиды обоихъ движеній, разнящіяся между собой по фазѣ на уголъ φ. Если мы синусоиды эти сложимъ алгебрически то получимъ снова синусоиду что вполнѣ согласуется съ выраженіемъ

(98). Составная синусоида имѣетъ большую амплитуду, нежели составляющія, а по фазѣ занимаетъ среднее положеніе между составляющими

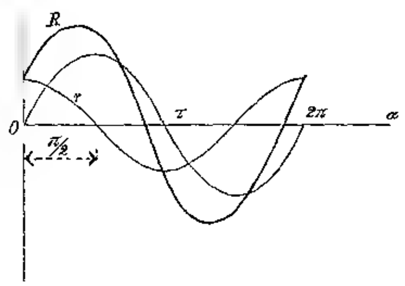
§ 111. Частные случаи сложенія гармоническихъ движеній.

1) Уголъ разности фазъ $\varphi = 0$. Въ этомъ случаѣ величина R



111.

а соотвѣтственно амплитуда синусоиды, пріобрѣтаетъ наибольшее значеніе, что видно изъ выраженія (98). Относительное расположеніе синусоидъ указано на фиг. 111.



112

2) Если $r = r_1$, но φ не равно нулю, то уголъ $\beta = \alpha - \frac{\varphi}{2}$, т. е. R запаздываетъ по фазѣ относительно r на половину угла между r и r_1.

3) Если $\varphi = 90^\circ$, т. е. радіусы-векторы образуютъ между собою прямой уголъ, находясь, какъ говорятъ, въ квадратурѣ (фиг. 112), то

$$R^2 = r^2 + r_1^2.$$

Если сверхъ того $r = r_1$, то

$$R = r\sqrt{2},$$

а уголъ $\beta = \alpha - 45^\circ$.

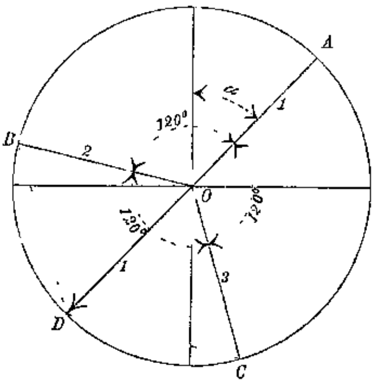
§ 112. Сложеніе трехъ гармоническихъ движеній.

Не разсматривая общаго случая сложенія трехъ колебательныхъ движеній, что можетъ быть произведено подобно изложенному въ по слѣднемъ параграфѣ, мы остановимся на томъ частномъ видѣ сложенія, когда имѣется три колебательныхъ движенія съ равными амплитудами, но разнящихся по фазѣ одно отъ другого на 120 (фиг 113).

Разстояніе в составномъ движенія опредѣлится изъ выраженія

$$X = r\,[\sin\alpha + \sin(\alpha - 120) + \sin(\alpha - 240)]$$

Сложимъ сначала движенія (2) и (3). Не трудно видѣть что радіусъ векторъ ихъ представится векторомъ OD, равнымъ r и дѣлящимъ уголъ BOC пополамъ, слѣдовательно $\angle BOD = 60°$, а потому линія OA и OD образуютъ одну прямую. Проектируя ихъ въ направленіе Ox получимъ



113

$$X = r\,[\sin\alpha + \sin(\alpha - 180)] = r\,(\sin\alpha - \sin\alpha) = 0,$$

т. е. точка, имѣя три колебательныхъ движенія, равныхъ по амплитудѣ, но разнящихся между собою по фазѣ на 120° остается въ покоѣ

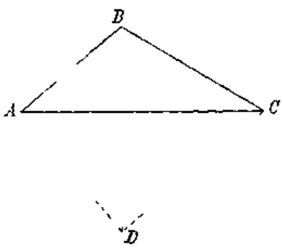
Если въ случаѣ трехъ движеній разность фазъ между двумя смежными радіусами будетъ 60°, то получимъ составное колебательное движеніе съ амплитудой вдвое большей каждаго изъ составляющихъ движеній.

ГЛАВА XI.

Движенie твердаго тѣла

§ 113. Неизмѣняемая система точекъ Опредѣленie положенiя ея въ пространствѣ.

Неизмѣняемой системой точекъ или абсолютно твердымъ тѣломъ называютъ такую совокупность точекъ, разстоянiя между которыми при всѣхъ перемѣщенiяхъ системы остаются постоянными. Если мы вообразимъ двѣ какiя либо точки такой системы, соединенными прямолинейнымъ отрѣзкомъ то какъ бы система не двигалась, длина этого отрѣзка будетъ сохранять свою величину.



114

Если мы имѣемъ произвольную совокупность точекъ, то для опредѣленiя движенiя такой системы, должны быть заданы для каждой точки въ отдѣльности траекторiя и законъ разстоянiй, или движенie ея должно быть опредѣлено какимъ либо другимъ изъ указанныхъ выше способовъ (§ 100). Въ случаѣ же твердаго тѣла вопросъ о движенiи его, равно какъ и объ опредѣленiи положенiя его въ пространствѣ въ любое мгновенie, можетъ быть значительно упрощенъ Такъ, не трудно показать, что для опредѣленiя положенiя любой точки твердаго тѣла (разстоянiя между точками котораго извѣстны), достаточно имѣть данными положенiя трехъ какихъ либо точекъ его не лежащихъ на одной прямой.

Пусть имѣемъ данными по положенiю точки A, B и C (фиг. 114). Положенie четвертой точки D будетъ также извѣстно; дѣйствительно, соединивъ ее съ данными точками прямыми и принявъ треугольникъ ABC за основанie, получимъ пирамиду, положенie вершины D которой будетъ вполнѣ опредѣлено, такъ какъ разстоянiя ея до трехъ данныхъ точекъ A, B и C извѣстны.

Изъ сказаннаго заключаемъ, что для опредѣленiя движенiя твердаго тѣла достаточно задать движенie трехъ точекъ его

Изъ числа различныхъ движеній, которыя можетъ имѣть неизмѣняемая система, простѣйшими являются: поступательное и вращательное около неподвижной оси.

Общее опредѣленіе этихъ движеній было дано выше (§ 37). Если всѣ точки тѣла движутся поступательно то всякая линія, соединяющая двѣ точки тѣла между собою или вообще неразрывно связанная съ тѣломъ, перемѣщается паралельно своему начальному положенію. Что же касается тѣхъ линій, которыя описываютъ концы ея, то онѣ могутъ имѣть произвольную форму; въ частномъ случаѣ онѣ могутъ быть прямыми (движеніе поѣзда по прямолинейному участку пути, движеніе тѣла по наклонной плоскости), дугами равныхъ круговъ, цѣлыми окружностями равными между собою. Изъ только что сказаннаго ясно, что при поступательномъ движеніи движеніе любой точки твердаго тѣла опредѣляетъ движеніе всѣхъ прочихъ точекъ этого тѣла

Нашей ближайшей цѣлью будетъ показать, что какое угодно элементарное перемѣщеніе тѣла можетъ быть разсматриваемо какъ составное изъ движеній поступательнаго и вращательнаго, если въ частномъ случаѣ оно не является однимъ изъ нихъ.

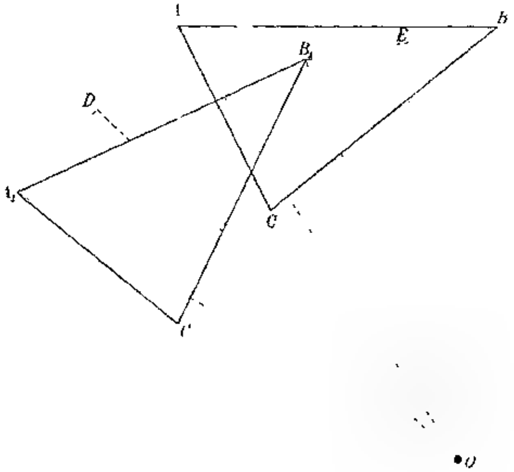
Для доказательства этого положенія разсмотримъ первоначально частный случай болѣе простой нежели случай общій, когда траекторіи точекъ тѣла лежатъ въ плоскостяхъ, паралельныхъ нѣкоторой данной плоскости. Покажемъ, что всякое элементарное перемѣщеніе точекъ тѣла можетъ быть при этомъ условіи разсматриваемо какъ вращательное около опредѣленной точки которой присваиваютъ названіе центра вращенія.

§ 114. Движеніе точекъ тѣла паралельно данной плоскости Центръ и ось вращеній.

Замѣтимъ предварительно, что положеніе всякой точки твердаго тѣла въ плоскости будетъ вполнѣ опредѣлено, если будутъ извѣстны разстоянія ея до двухъ данныхъ точекъ его лежащихъ въ той же плоскости

Пусть будутъ A и B (фиг. 115) точки твердаго тѣла, положеніе которыхъ дано. Положеніе какой угодно третьей точки C, лежащей въ одной плоскости съ A и B, при сказанномъ условіи также будетъ извѣстно, такъ какъ для этого придется описать дуги круговъ данными радіусами AC и BC; иначе говоря по тремъ даннымъ сторонамъ нужно построить треугольникъ.

Теперь положимъ, что тѣло въ элементъ времени перемѣстилось такъ, что точки A и B перешли въ положеніе A_1 и B_1, а точка C находится въ C Соединимъ соотвѣтственно точки A и A B и B_1 между собою прямыми раздѣлимъ ихъ пополамъ и въ точ кахъ дѣленія D и E возставимъ перпендикуляры до пересѣченія между собою въ точкѣ O. Точка эта и будетъ центромъ вращенія для обѣихъ точекъ A и B; дѣйствительно, если точка B вращаясь около центра O, опишетъ при этомъ дугу круга радіусомъ $BO = B_1O$ стягивающую центральный уголъ BOB_1, то она придетъ въ B_1. Что перемѣщеніе точки A въ A_1 можно разсматривать также какъ вращательное около точки O, видно изъ слѣдующаго: $AO = A_1O$, сверхъ того уголъ AOA_1 = углу BOB_1, такъ какъ вслѣдствіе равенства треугольниковъ A_1OB и AOB (имѣющихъ по три равныхъ сто-



115

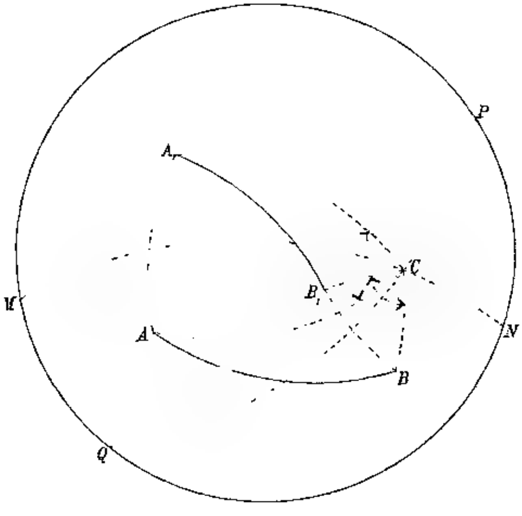
роны), будутъ равны между собою углы A_1OB_1 и AOB. Но если мы отъ того и другого отнимемъ по одинаковой части AOB_1, то остатки A_1OA и B_1OB будутъ также равны между собою. Отсюда заключаемъ когда точка B придетъ въ B_1, описавъ около центра O уголъ BOB то одновременно точка A опишетъ дугу круга, центръ котораго лежитъ въ той же точкѣ O. То же самое можетъ быть доказано по отношенію ко всѣмъ прочимъ точкамъ тѣла, для которымъ точка O и будетъ центромъ вращенія. Такимъ образомъ произвольное элементарное перемѣщеніе точекъ тѣла, совершающееся въ плоскости, можно разсматривать какъ вращательное около одной общей точки, служащей центромъ вращенія тѣла.

Положеніе центра вращенія мѣняется для каждаго элемента времени, что не трудно обнаружить, если взять какое нибудь новое произвольное положеніе точекъ A и B (или линіи AB) и построить для нихъ положеніе центра вращенія. Поэтому такой центръ носитъ названіе **мгновеннаго центра вращенія**. Если точки твердаго тѣла перемѣщаются такъ, что траекторіи ихъ лежатъ въ плоскостяхъ другъ другу паралельныхъ, то вслѣдствіе постоянной величины разстояній между ними точки, лежащія на линіяхъ перпендикулярныхъ къ плоскостямъ движенія точекъ, будутъ всегда оставаться на этихъ линіяхъ, т. е. будутъ описывать одинаковыя траекторіи. Вслѣдствіе этого и центры вращенія будутъ лежать на одной прямой, перпендикулярной къ плоскостямъ движеній, и образуютъ такимъ образомъ для всего тѣла **мгновенную ось вращенія**. Въ частномъ случаѣ, если тѣло имѣетъ постоянную ось вращенія, то траекторіи всѣхъ точекъ тѣла будутъ круги, плоскости которыхъ будутъ паралельны между собою.

Задача. Найти центръ вращенія доски ломбернаго стола.

§ 115. Движеніе твердаго тѣла, имѣющаго неподвижную точку.

Посредствомъ разсужденія, аналогичнаго только что изложенному, не трудно показать, **что если твердое тѣло имѣетъ неподвижную точку**, то элементарное перемѣщеніе всякой точки тѣла можетъ быть разсматриваемо какъ вращательное около оси, проходящей черезъ неподвижную точку тѣла. Опишемъ около этой точки (не показанной на чертежѣ) шаровую



116

поверхность (фиг. 116). Точки тѣла, находящiяся на этой поверхности, при движенiи его будутъ всегда оставаться на ней, такъ какъ центръ ея неподвиженъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ, если будетъ извѣстно движенiе точекъ этой шаровой поверхности, будетъ извѣстно и движенiе всего тѣла, такъ какъ поверхность связана съ тѣломъ неизмѣняемымъ образомъ. А для того, чтобы опредѣлить положенiе шаровой поверхности, вращающейся около своего центра, достаточно знать мѣста, занимаемыя двумя какими либо точками ея съ тѣмъ условiемъ, чтобы обѣ точки не лежали на концахъ одного и того же дiаметра. Дѣйствительно, подобно предыдущему, не трудно показать, что положенiе всякой другой точки, неразрывно связанной съ двумя данными точками, будетъ тѣмъ самымъ вполнѣ опредѣлено.

Итакъ пусть будутъ даны на описанной шаровой поверхности двѣ точки A и B, которыя въ теченiе элемента времени переходятъ соотвѣтственно въ A_1 и B_1. Покажемъ что подобное перемѣщенiе ихъ можетъ быть разсматриваемо какъ вращательное около нѣкоторой оси проходящей черезъ центръ шара.

Соединимъ точки A и A_1, а также B и B_1 дугами большихъ круговъ AA_1 и BB_1; раздѣлимъ эти дуги пополамъ и черезъ точки дѣленiя и центръ шара проведемъ большiе круги MN и PQ, которые пересѣкутся на поверхности шара въ двухъ точкахъ, представляющихъ концы одного и того же дiаметра; одна изъ нихъ, лежащая на обращенной къ намъ части шара обозначена буквою C. Проведемъ кромѣ того дуги большихъ круговъ AC, A_1C, BC, B_1C, при чемъ по построенiю

$$AC = A_1C,$$
$$BC = B_1C$$

Разсмотримъ трехгранные углы OA_1CB_1 и $OACB$ (точка O центръ шара). Углы эти, имѣя по три равныхъ стороны и соотвѣтственно расположенныхъ плоскихъ угла, равны между собою; слѣдовательно, двухгранные углы ихъ при точкѣ C также равны между собою.

Если къ этимъ угламъ мы придадимъ по углу ACB_1, то суммы будутъ также равны, т. е двугранный уголъ A_1CA будетъ равенъ углу B_1CB.

Перемѣщенiе точки A въ A_1 можно разсматривать какъ результатъ поворота всей шаровой поверхности около линiи CO ребра двуграннаго угла A_1CA, на величину этого угла, при чемъ точка A, оставаясь на шаровой поверхности, имѣющей неподвижный центръ, будетъ находиться на постоянномъ удаленiи отъ центра O. Кромѣ того точка A въ концѣ перемѣщенiя будетъ находиться на томъ же разстоянiи отъ точки C что и въ началѣ его такъ какъ $A_1C = AC$

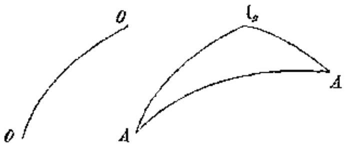
Такимъ образомъ точка будетъ одинаково удалена отъ всѣхъ точекъ линіи OC, которая будетъ для нея осью вращенія. Куда перемѣстится при этомъ точка B? Она точно такъ же будетъ оставаться на постоянномъ удаленіи какъ отъ центра вращенія O, такъ и отъ точки C, а, слѣдовательно, и отъ линіи OC при томъ въ концѣ перемѣщенія придетъ въ точку B_1, что слѣдуетъ изъ равенства двугранныхъ угловъ ACA_1 и BCB_1. Такимъ образомъ и перемѣщеніе точки B можно разсматривать какъ вращательное около той же оси вращенія. То же самое можетъ быть доказано относительно всѣхъ прочихъ точекъ тѣла. Ось OC является, слѣдовательно, осью вращенія для всего тѣла при разсматриваемомъ элементарномъ перемѣщеніи его около неподвижнаго центра O. Способъ построенія точки C и опредѣленія оси вращенія указываетъ на то, что элементарныя перемѣщенія въ различные промежутки времени имѣютъ и различныя оси вращенія, а потому оси этой присваивается названіе **мгновенной оси вращенія** для даннаго элементарнаго перемѣщенія тѣла.

Переходимъ теперь къ общему случаю движенія твердаго тѣла.

§ 116. Разложеніе элементарнаго перемѣщенія твердаго тѣла на поступательное и вращательное.

Пусть твердое тѣло въ теченіе безконечномалаго промежутка времени перемѣщается такъ, что нѣкоторая точка его O переходитъ въ положеніе O_1 (фиг. 117).

Пусть въ то же самое время другая точка A перейдетъ въ положеніе A_1 по нѣкоторой траекторіи AA_1.



117.

Перемѣщеніе AA_1 можетъ быть на основаніи правила сложенія и разложенія движеній составлено изъ двухъ перемѣщеній такъ что одно будетъ совершаться по линіи AA_2, при чемъ тѣло будетъ двигаться поступательно, т. е. прямая OA будетъ оставаться паралельной самой себѣ (O_1A_2 равна и паралельна OA), а другое будетъ состоять въ передвиженіи точки A_2 въ окончательное положеніе ея A_1. Подобнымъ же образомъ мы можемъ каждое изъ дѣйствительныхъ перемѣщеній всѣхъ точекъ тѣла замѣнить двумя движеніями, удовлетворяющими тому условію, что положенія точекъ въ концѣ даннаго элемента времени будутъ тѣ же, что и въ дѣйствительномъ движеніи. Для этого вообразимъ ихъ сначала перемѣщающимися поступательно такъ, что точка O по своей траекторіи перейдетъ въ O_1 т. е. займетъ положеніе, соотвѣтствующее концу даннаго элемента времени. А затѣмъ всѣ точки тѣла за исключеніемъ точки O_1, кото рая будетъ оставаться неподвижной перейдутъ въ свои окончательныя положенія, что по доказанному въ § 115 можетъ быть достигнуто вращеніемъ тѣла около неподвижной (мгновенной) оси, проходящей черезъ точку O_1. Такимъ образомъ произвольное перемѣщеніе каждой точки твердаго тѣла можетъ быть составлено изъ перемѣщенія поступательнаго и вращательнаго.

Итакъ мы доказали, что всякое элементарное перемѣщеніе твердаго тѣла можетъ быть разложено на два: на поступательное и вращательное около неподвижной оси.

Такъ какъ точка O есть точка вполнѣ произвольная, то разложеніе даннаго движенія на поступательное и вращательное можетъ быть совершено, вообще говоря, безконечнымъ числомъ способовъ.

Въ частныхъ же случаяхъ всякое движеніе тѣла какъ мы видѣли, приводится или только къ поступательному, или только къ вращательному, при чемъ послѣднее имѣетъ мѣсто въ двухъ случаяхъ: 1) когда точки тѣла перемѣщаются паралельно данной плоскости или, что то же, когда тѣло имѣетъ неподвижную ось и 2) когда тѣло имѣетъ неподвижную точку.

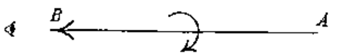
Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію правилъ сложенія движеній, заключающихся въ нахожденіи величины дѣйствительнаго перемѣщенія какой либо точки твердаго тѣла и окончательнаго положенія ея въ пространствѣ, если будутъ даны: начальное положеніе ея и составляющія перемѣщенія. Такъ такъ послѣднія въ простѣйшихъ своихъ видахъ приводятся къ перемѣщеніямъ поступательнымъ и вращательнымъ, то въ нижеслѣдующемъ намъ и надлежитъ разсмотрѣть какъ пріемы сложенія тѣхъ и другихъ въ отдѣльности, такъ и пріемы сложенія комбинацій ихъ

§ 117. Сложеніе поступательныхъ движеній.

Если какая либо точка твердаго тѣла имѣетъ два или нѣсколько поступательныхъ движеній, то въ этомъ случаѣ, очевидно, имѣютъ непосредственное приложеніе всѣ тѣ правила сложенія поступательныхъ движеній, которые были изложены въ кинематикѣ точки (§ 38), а потому мы можемъ сказать, что хорда составного перемѣщенія есть геометрическая сумма хордъ перемѣщеній составляющихъ. Такъ какъ хорды составляющихъ перемѣщеній, описываемыхъ всѣми точками твердаго тѣла въ каждомъ изъ нихъ на основаніи опредѣленія поступательнаго движенія будутъ между собою соотвѣтственно паралельны и равны, то и хорды составного перемѣщенія будутъ также взаимно паралельны и равны. Слѣдовательно, зная окончательное положеніе одной какой либо точки твердаго тѣла, мы безъ затрудненія найдемъ окончательныя положенія всѣхъ прочихъ точекъ его

§ 118. Изображеніе вращательныхъ движеній посредствомъ осей.

Всякое вращательное движеніе въ данное мгновеніе опредѣляется слѣдующими элементами: 1) положеніемъ оси вращенія въ пространствѣ, 2) направленіемъ вращенія и 3) угловой скоростью, подъ которой разумѣютъ скорость точки, удаленной на единицу разстояній отъ оси вращенія. Всѣ эти данныя въ совокупности могутъ быть изображены векторомъ, проведеннымъ такъ, чтобы онъ по положенію совпадалъ съ прямою, служащей осью вращенія въ данное мгновеніе и имѣлъ такое направленіе, чтобы глазу наблюдателя, расположенному согласно указанному



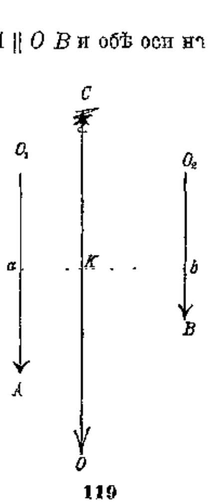
118

на фиг. 118, вращеніе представлялось совершающимся по часовой стрѣлкѣ. Наконецъ длина вектора AB, взятая въ извѣстномъ масштабѣ, должна выражать величину угловой скорости.

Подобное изображеніе вращеній посредствомъ векторовъ, которымъ присваиваютъ названіе **осей вращенія**, подразумѣвая подъ этимъ всѣ три указанные элемента вращенія, облегчаетъ въ значительной степени сложеніе вращательныхъ движеній.

§ 119. Сложеніе двухъ вращеній, оси которыхъ паралельны и направлены въ одну сторону.

Даны оси O_1A и O_2B (фиг. 119), причемъ $O_1A \parallel O_2B$ и обѣ оси направлены въ одну сторону. Требуется найти ось составного движенія. Какая-либо точка K, лежащая въ плоскости осей O_1A и O_2B, будетъ имѣть двѣ линейныя скорости: $O_1A \,.\, aK$, направленную за плоскость чертежа и $O_2B \,.\, bK$, обратную ей. Если точка эта находится въ покоѣ, для чего необходимо, чтобы линейныя скорости ея въ обѣихъ вращеніяхъ были равны по величинѣ и противоположны по направленію, то имѣемъ



119

$$O_1A \,.\, aK = O_2B \,.\, bK$$

откуда

$$\frac{O_1A}{O_2B} = \frac{bK}{aK}, \tag{99}$$

т. е. разстоянія ея до осей вращенія должны быть имъ обратно пропорціональны. Но въ подобныхъ условіяхъ будетъ находиться любая точка линіи OC, разстоянія которой до осей O_1A и O_2B удовлетворяютъ равенству (99), т. е. всѣ точки этой линіи будутъ неподвижны, слѣдовательно она и будетъ опредѣлять собою положеніе оси составного вращенія

Постараемся теперь опредѣлить угловую скорость этого вращенія, найдемъ для этого линейную скорость какой либо точки a, принадлежащей оси O_1A и имѣющей два вращенія около осей O_1A и O_2B: зная линейную скорость и разстояніе точки a до оси OC, мы найдемъ и искомую угловую скорость этой точки. Въ первомъ вращеніи скорость точки a равна нулю, такъ какъ она лежитъ на оси вращенія, а во второмъ скорость эта равна $O_2B\,.\,ab$. Слѣдовательно и составная скорость точки a будетъ $O_2B\,.\,ab$. Но съ другой стороны она должна выражаться произведеніемъ $aK\,.\,OC$, гдѣ OC искомая угловая скорость составного вращенія. Итакъ

$$aK\,.\,OC = O_2B\,.\,ab$$

$$OC = O_2B\,.\,\frac{ab}{aK} =$$

$$= O_2B\,\frac{aK + bK}{aK} =$$

$$= O_2B + O_2B\,.\,\frac{bK}{aK}$$

Изъ пропорціи же (99) получаемъ:

$$O_1A = O_2B\,.\,\frac{bK}{aK},$$

а потомъ

$$OC = O_2B + O_1A,$$

т. е. угловая скорость составного вращенія равна суммѣ угловыхъ скоростей вращеній составляющихъ.

Найденное правило распространяется безъ затрудненія на тотъ случай, когда тѣло имѣетъ нѣсколько вращеній около паралельныхъ осей, направленныхъ въ одну сторону, для чего слѣдуетъ только производить сложеніе этихъ вращеній по два.

§ 120. Сложеніе двухъ вращеній, оси которыхъ паралельны и направлены въ разныя стороны.

Если осями составляющихъ вращеній будутъ линіи O_1A и O_2B, противоположно направленныя (фиг. 120), то не трудно показать, что составное вращеніе выражается осью OC, равной разности ихъ, т. е.

$$OC = O_1A - O_2B.$$

Изъ этого выраженія видно, что направленіе составной оси будетъ одинаково съ направленіемъ большей изъ осей O_1A или O_2B. Положеніе же оси опредѣлится разсужденіемъ, подобнымъ изложенному выше при сложеніи одинаково направленныхъ паралельныхъ осей.

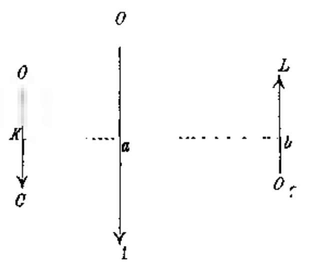
Нѣкоторая точка K (какъ будетъ далѣе видно, лежащая за большей изъ осей) будетъ покоиться, если будетъ соблюдено условiе:

$$aK \cdot O_1A = bK \cdot O_2B$$

откуда

$$\frac{O_1A}{bK} = \frac{O_2B}{aK}, \qquad (100)$$

т. е. если разстоянiя точки до осей будутъ обратно имъ пропорцiональны. Не трудно усмотрѣть непосредственно изъ направленiя вращенiй, что всякая точка, помѣщенная между осями O_1A и O_2B, имѣетъ въ составляющихъ вращенiяхъ скорости, совпадающiя между собою по направленiю.



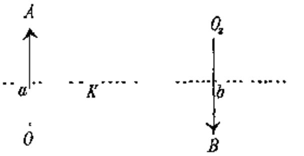
120

Итакъ, если оси составляющихъ вращенiй, будучи между собою паралельны, направлены въ то же время въ разныя стороны, то ось составного вращенiя равна алгебрической разности ихъ [*]), лежитъ въ одной плоскости съ осями внѣ ихъ въ сторонѣ большей оси на такомъ удаленiи отъ осей, что разстоянiя ихъ до составной оси обратно пропорцiональны величинамъ осей. Найдемъ разстоянiя осей OC и O_1A до оси O_2B. Имѣемъ изъ пропорцiи (100):

$$\frac{O_1A}{O_2B} = \frac{bK}{aK}$$

$$\frac{O_1A - O_2B}{O_1A} = \frac{bK - aK}{bK}.$$

$$\frac{OC}{O_1A} = \frac{ab}{bK} \qquad (101)$$



121

Въ частномъ случаѣ (фиг. 121) если

$$O_1A = O_2B$$

то

$$OC = 0$$

Найдемъ разстоянiе bK этой оси до оси O_2B. Изъ уравненiя (101) получаемъ

$$bK = \frac{O_1A}{OC} \cdot ab = \infty$$

[*]) Опредѣленiе «алгебрическая» разность указываетъ и на направленiе составной оси.

такъ какъ

$$OC = 0$$

т. е. ось составного вращенія, будучи по величинѣ равной нулю удалена на безконечное разстояніе. Но вращеніе около безконечно-удаленной оси обращается въ поступательное движеніе. Такимъ образомъ, если тѣло имѣетъ два вращенія около паралельныхъ, обратно направленныхъ и равныхъ между собою по величинѣ осей или, какъ говорятъ, **если тѣло имѣетъ пару вращеній** то **составное движеніе тѣла будетъ поступательнымъ.**

Чтобы убѣдиться въ этомъ съ полной ясностью, достаточно показать, что всѣ точки тѣла будутъ имѣть одну и ту же по величинѣ и направленію линейную скорость. Такъ напр., скорость какой нибудь точки K по величинѣ опредѣлится изъ выраженія

$$_k = O_2B \,.\, bK + O_1A \,.\, aK,$$

но такъ какъ

$$O_2B = O_1A$$

то

$$v_k = O_1A\,(bK + aK) = O_1A \quad ab, \quad \ldots \qquad (102)$$

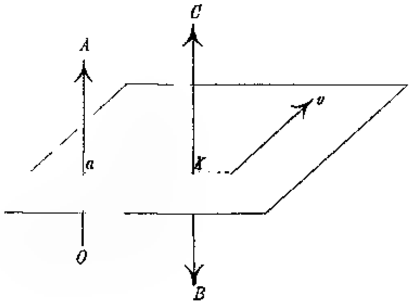
т. е. скорость эта не зависитъ отъ положенія точки K, а будетъ слѣдовательно одной и той же для любой точки тѣла при данной парѣ вращеній. Замѣтимъ здѣсь, что задавая пару, нужно кромѣ величины и направленій осей вращеній указать и разстояніе между ними, называемое **плечомъ** пары, такъ какъ отъ него зависитъ скорость поступательнаго движенія точекъ тѣла (102).

Не трудно по направленію осей непосредственно изъ фиг. 121 усмотрѣть, что при обоихъ вращеніяхъ точки тѣла будутъ двигаться по перпендикуляру къ плоскости чертежа въ сторону къ читателю.

§ 121. Сложеніе движеній: вращательнаго и поступательнаго перпендикулярнаго къ оси вращенія.

Пусть векторъ OA будетъ осью вращенія тѣла (фиг. 122); пусть тѣло имѣетъ кромѣ вращательнаго движенія поступаніе со скоростью v, лежащей въ плоскости, перпендикулярной къ оси OA. Изъ точки пересѣченія a оси OA съ плоскостью опустимъ перпендикуляръ на направленіе скорости v. Отложимъ на немъ отрѣзокъ aK равный $\frac{v}{OA}$. Въ точкѣ K возставимъ перпендикуляръ къ плоскости; отложимъ по направленію его два вектора KB и KC, равныхъ по величинѣ оси вращенія OA, которое имѣетъ тѣло, но взаимнопротивоположныхъ по направленію. Сообщимъ тѣлу два вращенія, оси которыхъ выражались бы указанными векторами вращенія эти, очевидно не произведутъ никакого измѣненія въ состояніи тѣла.

Сложимъ между собою вращенія OA и KB; вращенія эти, образуя пару вращеній, могутъ быть замѣнены однимъ поступательнымъ дви женіемъ, скорость котораго будетъ равна данной скорости v, но обратно направлена, а такія поступательныя движенія взаимно уничтожаются. Въ результатѣ у насъ остается одно вращеніе KC, ось котораго равна и паралельна данной оси. Итакъ, два движенія—вращательное и перпендикулярное къ оси его поступательное могутъ быть замѣнены однимъ вращательнымъ движеніемъ ось котораго паралельна и равна оси даннаго вращенія, но находится отъ нея на разстояніи, равномъ отношенію скорости поступательнаго движенія къ угловой скорости вращательнаго, на линіи перпендикулярной къ скорости поступательнаго движенія



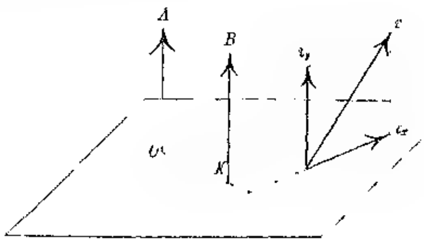
122

Слѣдствіе. Изъ только что выведеннаго слѣдуетъ, что ось вращенія въ тѣлѣ можетъ быть перенесена паралельно самой себѣ безъ измѣненія движенія тѣла, если одновременно будетъ сообщена тѣлу пара вращеній со скоростью, равной произведенію оси на разстояніе между старымъ и новымъ положеніемъ ея или равноцѣнное этой парѣ вращеній поступательное движеніе по направленію перпендикулярному къ плоскости осей

§ 122 Сложеніе вращательнаго и поступательнаго движеній.

Пусть разсматриваемое нами твердое тѣло имѣетъ два движенія: вращательное, ось котораго выражается векторомъ OA (фиг. 123), и поступательное со скоростью v. Разложимъ послѣднюю по двумъ взаимноперпендикулярнымъ направленіямъ на v_x и v_y, изъ которыхъ вторая лежитъ въ плоскости, перпендикулярной къ оси вращенія. Вращеніе OA и поступательное движеніе со скоростью v_x могутъ быть замѣнены, согласно предыдущему параграфу, однимъ вращеніемъ съ осью KB паралельной оси вращенія, но находящейся отъ ноя на разстояніи, равномъ отношенію скорости v_r къ угловой скорости вращенія OA, т. е. $v_r : OA$.

Такимъ образомъ два данныя движенія замѣняются однимъ вра-

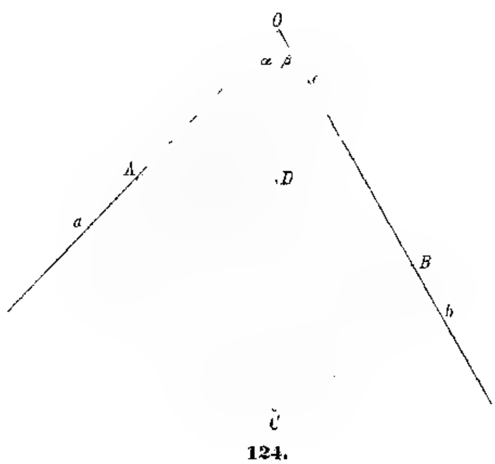


123.

щательнымъ движеніемъ и поступательнымъ по направленію паралельному оси вращательнаго движенія.

§ 123. Сложеніе двухъ вращеній, оси которыхъ пересѣкаются. Правило паралелограма.

Предположимъ, что намъ дано твердое тѣло, имѣющее два вра-



124.

щенія, изображающіяся осями OA и OB, пересѣкающимися въ точкѣ O (фиг. 124). Докажемъ, что оба эти вращенія, будучи сложены вмѣстѣ, даютъ новое вращательное движеніе, осью котораго будетъ діагональ OC паралелограма, построеннаго на осяхъ OA и OB составляющихъ движеній.

Для того, чтобы линія OC была осью такого движенія, достаточно во-первыхъ показать, что она имѣетъ двѣ точки, остающіяся неподвижными при совокупности вращеній OA и OB, а во-вторыхъ, что угловая скорость составного движенія измѣряется величиною OC. Неподвижными точками линіи OC будутъ: точка O, принадлежащая обѣимъ осямъ OA и OB, а затѣмъ точка C, линейныя скорости которой въ составляющихъ вращеніяхъ равны по величинѣ и противоположны по направленію; въ самомъ дѣлѣ, опустивъ перпендикуляръ Ca изъ точки C на направленіе оси OA, мы получимъ, что скорость точки C во вращеніи около оси OA будетъ равна

$$OA \, . \, aC$$

и направлена перпендикулярно къ плоскости чертежа отъ читателя; скорость же той же точки въ движеніи OB равна

$$OB \, . \, bC$$

и направлена къ читателю также перпендикулярно къ плоскости чертежа. Но

$$OA \, . \, aC = OB \, . \, bC,$$

такъ какъ

$$OA = \frac{AD}{\sin\alpha}; \quad Ob = AC = \frac{AD}{\sin\beta},$$

$$aC = OC \, . \, \sin\alpha; \; bC = OC \sin\beta$$

$$OA \, . \, aC = \frac{AD}{\sin\alpha} \, . \, OC \sin\alpha = AD \, . \, OC$$

$$OB \, . \, bC = \frac{AD}{\sin\beta} \, . \, OC \sin\beta = AD \, . \, OC$$

Слѣдовательно, составная линейная скорость точки C равна нулю, т. е. точка остается неподвижной, а потому линія OC представляетъ собою направленіе оси вращенія.

Что же касается величины угловой скорости составного вращенія, то мы найдемъ ее, опредѣливъ напр. скорость (линейную) точки A въ этомъ движеніи, а затѣмъ, зная разстояніе ея до оси OC, мы опредѣлимъ и ея угловую скорость.

Эта точка, какъ и всѣ точки тѣла, имѣетъ два вращенія около осей OA и OB; но въ первомъ скорость ея равна нулю, такъ какъ она лежитъ на оси; слѣдовательно, составная скорость ея будетъ равна скорости при одномъ второмъ вращеніи; во-второмъ же скорость ея будетъ $OB \cdot Ae$, при чемъ Ae перпендикулярно къ OB. Но изъ сравненія треугольниковъ OAB и OAC, равновеликихъ между собою (каждый равенъ половинѣ паралелограма $OBCA$), получаемъ

$$OB \cdot Ae = OC \cdot AD$$

гдѣ AD разстояніе точки до оси OC, а OC—величина угловой скорости.

Итакъ, мгновенная ось составного вращенія твердаго тѣла выражается по величинѣ и направленію діагональю паралелограма, построеннаго на осяхъ составляющихъ вращеній или иначе ось составного вращенія равна геометрической суммѣ осей составляющихъ вращеній, т. е.

$$OC = OA + OB.$$

Мы видимъ такимъ образомъ, что правило паралелограма, доказанное ранѣе для скоростей поступательныхъ движеній, будетъ справедливо и для осей движеній вращательныхъ.

Примѣромъ практическаго примѣненія сложенія вращательныхъ движеній около двухъ постоянныхъ осей для полученія вращенія около произвольной оси, лежащей въ плоскости осей слагаемыхъ движеній, служитъ привѣсъ Кардана, примѣняемый на судахъ для подвѣшиванія предметовъ, которые при наклоненіяхъ судна должны сохранить вертикальное положеніе; таковы лампы подсвѣчники и т. п.

§ 124. Многоугольникъ вращеній

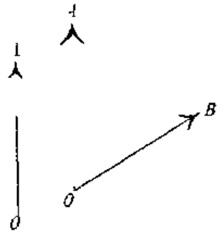
Только что найденное правило паралелограма для осей вращеній безъ затрудненія распространяется и на случай нѣсколькихъ вращательныхъ движеній (§ 39), и мы получимъ правило многоугольника вращеній, по которому сторона, замыкающая многоугольникъ, построенный на осяхъ составляющихъ вращеній будетъ осью вращенія составного или, что то же, ось составного вращательнаго движенія есть геометрическая сумма осей вращеній составляющихъ

Отсюда слѣдуетъ, что оси вращеній могутъ быть слагаемы по правиламъ геометрическаго сложенія, а потому къ нимъ безъ дальнѣйшихъ объясненій прилагаются выводы, изложенные въ §§ 17, 18 и 19. Изъ нихъ наиболѣе важнымъ по своимъ приложеніямъ является случай, когда вращеніе опредѣлено посредствомъ трехъ прямоугольныхъ осей, выражающихъ составляющія движенія, при чемъ направленія осей проходятъ черезъ неподвижную точку въ тѣлѣ

Какъ было доказано, всякое движеніе тѣла, имѣющаго неподвижную точку, можетъ быть представлено какъ движеніе вращательное около нѣкоторой мгновенной оси, проходящей черезъ эту точку. Какъ показываетъ самое названіе положеніе направленіе и величина этой оси *) мѣняются съ теченіемъ времени, но во всякое данное мгновеніе ось эта можетъ быть опредѣлена тремя своими проекціями на три неподвижныя прямоугольныя оси, которыя и будутъ осями составляющихъ движеній. Если ось составного вращенія равна нулю, то будетъ равна нулю и каждая изъ составляющихъ осей, иначе говоря, если скорость составного вращенія равна нулю, слѣдовательно, если тѣло, имѣя неподвижную точку, находится въ покоѣ, то и скорости составляющихъ вращеній будутъ равны нулю, и обратно: для того чтобы тѣло не имѣло вращательнаго движенія, должны быть равны нулю оси трехъ взаимноперпендикулярныхъ вращеній.

§ 125. Сложеніе двухъ вращеній, оси которыхъ не лежатъ въ одной плоскости.

Пусть тѣло имѣетъ два вращенія, опредѣляемыя осями OA и O_1B (фиг. 125). Для сложенія этихъ вращеній поступимъ такъ: перенесемъ ось вращенія OA паралельно самой себѣ въ произвольную точку O_1 оси O_1B; совершая такой переносъ, мы должны будемъ сообщить тѣлу соотвѣтственнымъ образомъ подобранное поступательное движеніе съ тѣмъ, чтобы состояніе тѣла не измѣнилось. Вращенія O_1A_1 и O_1B, оси которыхъ пересѣкаются, могутъ быть замѣнены однимъ вращеніемъ по правилу паралелограма (§ 123). Слѣдовательно, данная совокупность двухъ вращеній можетъ быть замѣнена однимъ поступаніемъ и однимъ вращеніемъ. Послѣднія же два движенія всегда могутъ быть замѣнены вращеніемъ и поступательнымъ движеніемъ — по направленію оси вращенія (§ 121). Итакъ, *совокупность двухъ вращеній оси которыхъ не лежатъ въ одной плоскости, можетъ быть замѣнена однимъ вращеніемъ и однимъ поступательнымъ движеніемъ по направленію оси вращенія.*



125

§ 126. Общіе выводы о сложеніи движеній твердаго тѣла

Резюмируя все изложенное о сложеніи движеній твердаго тѣла мы приходимъ къ слѣдующимъ выводамъ:

1) Два или нѣсколько поступательныхъ движеній всегда приводятся къ одному поступательному движенію

2) Совокупность произвольнаго числа вращеній приводится въ общемъ случаѣ къ одному вращенію и одному поступательному движенію по направленію, паралельному оси вращенія; въ частныхъ же

*) Замѣтимъ кстати, что это тѣ же самые элементы которые характеризуютъ собою всякій векторъ

случаяхъ или къ одному вращенію (§§ 119, 120 и 123) или къ парѣ вращеній (§ 120), которая можетъ быть замѣнена однимъ поступательнымъ движеніемъ.

3) Совокупность произвольнаго числа поступательныхъ и вращательныхъ движеній приводится въ общемъ случаѣ къ одному вращательному движенію и одному поступательному по направленію паралельному оси вращенія *). Въ частномъ же случаѣ, если составное поступательное движеніе будетъ лежать въ плоскости перпендикулярной къ оси вращенія, вся данная совокупность движеній замѣняется однимъ вращеніемъ (§ 121)

* Результатомъ этихъ движеній является винтовое движеніе около оси вращенія.

ДИНАМИКА.

ГЛАВА XII

Основныя начала динамики

§ 127. Начало косности и начало независимости.

При изслѣдованіи движеній, при выводѣ зависимостей между механическими величинами, его опредѣляющими, мы пока не касались причинъ, отъ которыхъ зависитъ данное движеніе, но найти эти причины, указать соотношеніе между ними и движеніемъ представляется весьма важнымъ, какъ для болѣе подробнаго и широкаго изученія самаго явленія, такъ и въ цѣляхъ чисто практическихъ для возможности пользоваться различными движеніями или производить по нашему произволу тѣ или другія перемѣщенія тѣлъ съ извѣстными скоростями и ускореніями. Къ этому мы теперь и перейдемъ.

Причины, производящія движеніе тѣла или оказывающія вліяніе на него, мы можемъ искать, вообще говоря, въ самомъ тѣлѣ или внѣ послѣдняго. Для выясненія этого обстоятельства обратимся къ разсмотрѣнію дѣйствительныхъ явленій движенія.

Если тяжелое тѣло падаетъ, не имѣя начальной скорости, то для такого движенія имѣемъ уравненіе:

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

гдѣ g—ускореніе, съ которымъ падаетъ тѣло, равное приблизительно 9,81 м./сек^2.

Если падающему тѣлу была сообщена начальная скорость—v_0, то разстояніе, проходимое тѣломъ, будетъ таково:

$$s = v_0t + \frac{gt^2}{2}.$$

Это движеніе можно разсматривать какъ бы состоящимъ изъ двухъ движеній: равномѣрнаго со скоростью v_0 и равноускореннаго съ ускореніемъ g.

Если мы бросимъ какое либо тѣло горизонтально со скоростью v_0, то и здѣсь дѣйствительное движеніе тѣла можетъ быть разложено на два: одно по горизонтальному направлен ю при чемъ

$$s_h = v_0 t$$

другое по вертикали, здѣсь

$$s = \frac{gt^2}{2}$$

Въ какомъ бы направлени мы не сообщали скорость бросаемому тѣлу, разлагая дѣйствительное движенıе тѣла на два составляющихъ, мы всегда получимъ, что одно изъ этихъ движенiй будетъ прямолинейнымъ и равномѣрнымъ съ приданною тѣлу начальною скоростью, которая тѣломъ какъ бы сохраняется; второе будетъ всегда равноускореннымъ съ однимъ и тѣмъ же по величинѣ и направленiю ускоренiемъ g, независимо отъ величины и направленıя начальной скорости.

Чему приписать во первыхъ то, что тѣло постоянно сохраняетъ разъ приданную ему скорость, во вторыхъ то, что независимо отъ этой скорости тѣло при паденiи получаетъ одно и то же ускоренiе?

Такъ какъ скорость, сообщенная тѣлу, сохраняется имъ независимо отъ того, какое направленiе относительно ея будетъ имѣть получаемое тѣломъ ускоренıе, другими словами, независимо отъ обстоятельствъ движенıя послѣ начальнаго мгновенiя то наиболѣе естественнымъ является приписать свойство это — способность сохранять скорость, независимо отъ условiй движенiя, самому тѣлу; при этомъ скорость сохранятся одинаково, будетъ ли она нулемъ или выразится нѣкоторымъ числомъ, при чемъ послѣднее возможно только въ томъ случаѣ, если мы предварительно выведемъ покоющееся тѣло изъ состоянiя покоя, сообщивъ ему скорость; тѣло же само этой скорости себѣ не придаетъ но за то, разъ получивъ ее уже ее и сохраняетъ. Мы приходимъ такимъ образомъ къ тому заключенiю, что тѣло обладаетъ свойствомъ сохранять свою скорость или, какъ говорятъ, сохранять свое состоянiе, будетъ ли то покой или движенiе съ нѣкоторой постоянной по величинѣ и направленıю скоростью, т е. движенiе прямолинейное и равномѣрное Тѣло своего состоянiя само не мѣняетъ, являясь, слѣдовательно, коснымъ инертнымъ вслѣдствıе чего и указанное свойство тѣлъ называютъ косностью или инерцiей, а самое начало механики, приписывающее тѣламъ свойство сохранять свое состоянiе началомъ косности или началомъ инерцiи

Второе обстоятельство, состоящее въ томъ, что тѣло, какъ мы теперь уже можемъ сказать, независимо отъ своего состоянiя получаетъ одно и то же ускоренiе остается приписать причинамъ лежащимъ внѣ тѣла. Причинамъ этимъ даютъ общее названіе силъ, и слѣдовательно, сущность дѣйствія силъ на движущееся или покоющееся тѣло состоитъ въ сообщеніи ускоренія, при чемъ ускореніе это будетъ независимымъ отъ состоянія тѣла. Мы имѣемъ такимъ образомъ второе основное положеніе или начало механики, которое можетъ быть названо началомъ независимости дѣйствія силъ отъ состоянія тѣла. Теперь же добавимъ, а впослѣдствіи приведемъ въ подтвержденіе нѣкоторыя соображенія, на основаніи которыхъ указанное начало расширяютъ, полагая дѣйствіе силъ независимымъ отъ дѣйствія другихъ силъ на то же тѣло. Въ такомъ случаѣ полное выраженіе закона независимости или абстракціи будетъ состоять въ томъ, что данная сила дѣйствуетъ на тѣло, т. е. сообщаетъ ему извѣстное ускореніе, независимо какъ отъ состоянія тѣла, такъ и отъ дѣйствія другихъ силъ.

О силѣ количественно мы можемъ судить по измѣненію скорости движенія съ теченіемъ времени, по ускоренію, сообщаемому данной силой. Слѣдовательно, самая сущность силы такимъ путемъ не разъясняется; но такъ какъ для насъ съ механической точки зрѣнія важно лишь установленіе количественнаго соотношенія между силами и движеніемъ, то обстоятельство это ввиду указанныхъ соображеній не имѣетъ значенія.

Оба высказанныя начала, будучи выведены изъ опытовъ, находятъ себѣ подтвержденіе въ послѣднихъ и при томъ въ своей совокупности; отдѣльно же подтверждаются косвенно. Приведемъ по этому поводу слова Вышнеградскаго *).

«Что намъ за дѣло въ приложеніяхъ до справедливости отдѣльныхъ гипотезъ, если мы эти гипотезы будемъ употреблять не иначе какъ вмѣстѣ и убѣждены, что чрезъ ихъ соединеніе получимъ истинные, дѣйствительные результаты? Положимъ, я знаю достовѣрно, что у меня всего есть 2 тысячи рублей денегъ и они лежатъ въ двухъ ящикахъ; положимъ, что я сосчиталъ деньги въ одномъ изъ этихъ ящиковъ и нашелъ, что тамъ 1 тысяча рублей; изъ этого я заключаю, что въ другомъ ящикѣ будетъ тоже тысяча; если я ошибся въ счетѣ денегъ перваго ящика на 100 рублей, если тамъ находится только 900 рублей, то мое заключеніе относительно денегъ второго ящика будетъ тоже ошибочно: тамъ будетъ не 1000, а 1100 рублей; но если я эти деньги затѣмъ ссыпаю вмѣстѣ и употребляю не раздѣльно, то двѣ ошибки, которыя я сдѣлалъ, не будутъ имѣть никакого вліянія на мои остальные расчеты. То же самое будетъ и въ

*) Л. Кирпичевъ. Начала механики. 1889 стр. 241

нашемъ случаѣ; каждая изъ двухъ сдѣланныхъ гипотезъ можетъ быть невѣрна, но какъ онѣ вмѣстѣ взятыя даютъ явленіе, въ достовѣрности котораго я убѣжденъ, то и результаты мною получаемые чрезъ соединеніе этихъ невѣрныхъ гипотезъ, будутъ справедливы»

§ 128. Примѣры, подтверждающіе начала косности и независимости. Отдѣльно по поводу высказанныхъ началъ можно привести слѣдующія соображенія: Если тѣло покоится, то нѣтъ достаточнаго основанія, чтобы оно само пришло въ движеніе по тому или другому направленію. Если тѣло находится въ движеніи съ нѣкоторой опредѣленной скоростью, то также нѣтъ основанія, чтобы оно измѣнило направленіе своей скорости въ данную сторону, а не въ какую либо другую. Что же касается величины скорости, то доказать, что скорость останется постоянной, если на тѣло не будутъ дѣйствовать никакія внѣшнія причины, не представляется возможнымъ, дѣйствительныя явленія движенія тѣлъ обыкновенно даютъ поводъ сдѣлать обратное заключеніе, благодаря чему тѣламъ природы приписывалось многими стремленіе къ покою. Но если мы разсмотримъ внимательно различные примѣры движенія, примемъ въ расчетъ вліяніе всѣхъ причинъ, лежащихъ внѣ тѣла и дѣйствующихъ на него, мысленно освободимъ тѣло отъ этого вліянія, заключающагося въ сообщеніи тѣлу ускореній, то мы увидимъ, что въ результатѣ останется или равномѣрное прямолинейное движеніе, или въ частномъ случаѣ покой

Вотъ примѣры, подтверждающіе начало инерціи: человѣкъ, выскакивающій изъ движущагося экипажа, сохраняетъ имѣющуюся скорость, одинаковую со скоростью экипажа, и потому касаясь ногами земли, наклоняется въ сторону движенія. При внезапной остановкѣ вагона, сидящіе въ немъ пасажиры наклоняются по направленію движенія, сохраняя имѣющуюся скорость. Тѣло, брошенное вверхъ человѣкомъ находящимся на прямолинейно движущемся суднѣ, снова попадетъ при паденіи ему въ руки, сохраняя скорость общую съ судномъ. Шаръ, движущійся по горизонтальной поверхности, съ теченіемъ времени останавливается; но разстояніе, проходимое шаромъ будетъ тѣмъ больше чѣмъ ровнѣе поверхность, по которой онъ движется, чѣмъ меньше, слѣдовательно, тѣ причины, называемыя сопротивленіями, которыя препятствуютъ этому движенію. Мы подходимъ къ заключенію, что если бы всѣ сопротивленія были устранены, то шаръ двигался бы вѣчно съ постоянной скоростью.

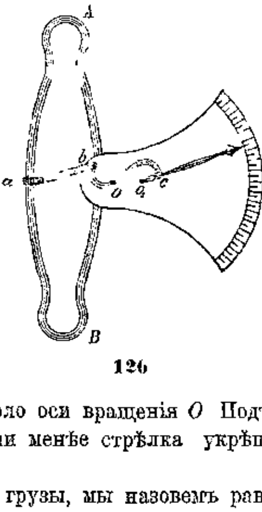
Движеніе тѣлъ брошенныхъ, артилерійскихъ снарядовъ и т. п. подтверждаетъ совокупность обоихъ началъ — инерціи и абстракціи. Если мы отнимемъ (механически) вліянія производимыя внѣшними причинами, предполагая ихъ дѣйствующими независимо отъ состоянія тѣла и другъ отъ друга, то въ результатѣ мы получимъ прямо линейное и равномѣрное движеніе. Стоитъ разсмотрѣть только приводившіяся выше уравненія движенія этихъ тѣлъ (§ 127, *).

Упомянемъ затѣмъ о слѣдующихъ фактахъ: насаживаніе топора на топорище ударами рукоятки; отклоненіе падающихъ съ значительныхъ высотъ тѣлъ отъ вертикальнаго направленія вслѣдствіе движенія земли; движеніе тѣла, удерживаемаго нитью и движущагося по окружности или вообще непрямолинейно въ случаѣ разрыва нити, при чемъ оно начинаетъ двигаться по прямой, касательной къ кривой въ мгновеніе прекращенія дѣйствія нити, открытіе планеты Нептунъ **) и т. д.

§ 129. Силы и ихъ измѣреніе

1. Посредствомъ силомѣровъ (динамометровъ).

Мы можемъ судить непосредственно о дѣйствіи силъ на основаніи слѣдующаго положенія: если дѣйствіе каждой изъ двухъ силъ на данное тѣло при прочихъ равныхъ условіяхъ одно и то же, то такія силы называются равными между собою. Зная одну изъ силъ, мы путемъ непосредственнаго сравненія найдемъ другую, примѣняя приборы, извѣстные подъ названіемъ динамометровъ или силомѣровъ, къ числу которыхъ принадлежатъ и пружинные вѣсы.



126

Общее устройство динамометровъ, описываемое въ курсахъ физики, подобно динамометру Реньо, изображенному на фиг. 126. При употребленіи его конецъ A укрѣпляется неподвижно, а къ B подвѣшивается взвѣшиваемый грузъ. Въ зависимости отъ величины послѣдняго вертикальныя части динамометра болѣе или менѣе сближаются; при этомъ рычажекъ ab, соединенный шарниромъ съ рычажкомъ bc, поворачиваетъ послѣдній около оси вращенія O. Подъ дѣйствіемъ же bc поворачивается болѣе или менѣе стрѣлка, укрѣпленная на оси O_1.

Подвѣшивая къ динамометру различные грузы, мы назовемъ равными между собою тѣ, которые сжимаютъ одинаково пружину динамометра, зная величину одного изъ нихъ, будемъ знать величину другого.

Но такой способъ измѣренія силъ не всегда примѣнимъ, и кромѣ того мы не получаемъ зависимости между силою и ускореніемъ

*) Изложенныя начала могутъ быть подтверждены непосредственными опытами на машинѣ Атвуда или наклонной плоскости.

**) См. Начала механики, Л. Кирпичева, стр. 239.

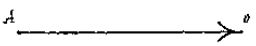
такъ какъ динамометръ при опредѣленіи величины силы находится въ покоѣ. Обратимся теперь къ другому способу для сужденія о величинѣ силъ, а именно по производимымъ ими ускореніямъ.

2. Измѣреніе силъ посредствомъ производимыхъ ими ускореній.

Пусть на данное тѣло A дѣйствуетъ нѣкоторая сила F и производитъ ускореніе w (фиг. 127), прекратимъ дѣйствіе этой силы на тѣло и заставимъ дѣйствовать другую силу F_1 производящую ускореніе w_1 въ n разъ большее нежели w; тогда

$$w_1 = nw.$$

То же дѣйствіе мы можемъ получить иначе, заставивъ дѣйствовать на тѣло одновременно по одному и тому же направленію n равныхъ между собою силъ, изъ которыхъ каждая въ отдѣльности произвела бы ускореніе w. На основаніи начала независимости дѣйствія каждой силы отъ дѣйствія другихъ силъ при совмѣстномъ приложеніи каждая сила произведетъ то же ускореніе w. Такъ какъ направленія ускореній совпадаютъ, то общее ускореніе, ими производимое, будетъ равно $nw = w_1$, но то же ускореніе производится также силой F_1, а потому мы скажемъ, что сила F_1, производящая ускореніе $w_1 = nw$, будетъ равна nF, такъ какъ равными между собою силами мы называемъ такія, которыя производятъ при прочихъ равныхъ условіяхъ одно и то же дѣйствіе на данное тѣло, т. е. сообщаютъ ему одно и то же ускореніе.



127

Если бы нѣкоторая сила F_2 произвела ускореніе $w_2 = pw$, то по изложенному мы заключили бы, что $F_2 = pF$ и т. д.

Итакъ, мы имѣемъ:

$$F_1 = nF, \quad F_2 = pF, \ldots$$
$$w_1 = nw, \quad w_2 = pw, \ldots$$

Дѣля соотвѣтственно вышестоящія равенства на нижестоящія найдемъ

$$\frac{F_1}{w_1} = \frac{F}{w} = \frac{F_2}{w_2} = \ldots \qquad (103)$$

т. е. силы пропорціональны сообщаемымъ ими ускореніямъ при дѣйствіи на одно и то же тѣло.

§ 130. Масса тѣла.

Если бы мы подвергли дѣйствію силы F какое либо другое тѣло, то, вообще говоря, мы замѣтили бы, что ускореніе, ею производимое, было бы уже не w, а нѣкоторое другое. Такимъ образомъ постоянная величина отношения (103) характеризуетъ тѣло въ отношеніи дѣйствія на него силъ и, слѣдовательно, въ механическомъ отношеніи является весьма важной. Ей присваиваютъ названіе массы тѣла. Мы усматриваемъ, что масса тѣла будетъ тѣмъ больше, чѣмъ больше должна быть сила, необходимая для приданія тѣлу одного и того же ускоренія. Обстоятельство это аналогично тому, которое мы встрѣчаемъ напр. въ ученіи о теплотѣ, гдѣ для повышенія температуры на опредѣленное число градусовъ количество тепла, сообщаемаго различнымъ тѣламъ при одинаковомъ вѣсѣ ихъ, будетъ тѣмъ больше, чѣмъ больше теплоемкость тѣла, подобное находимъ въ электричествѣ — электроемкость. По аналогіи съ этимъ массѣ можетъ быть дано названіе силоемкости.

Обозначая массу даннаго тѣла черезъ m получимъ

$$\frac{F}{w} = m$$

Зная силу и производимое ею ускореніе, мы опредѣлимъ массу тѣла; зная же массу и ускореніе, производимое данной силой найдемъ и самую силу изъ выраженія:

$$F = mw, \qquad (104)$$

изъ котораго видимъ, что сила, дѣйствующая на данное тѣло равна произведенію изъ массы на ускореніе, ей сообщаемое

§ 131. Виды движеній подъ дѣйствіемъ различныхъ силъ

Если ускореніе, сообщаемое силой, будетъ постояннымъ по величинѣ и направленію, то и сама сила, на тѣло дѣйствующая, будетъ также постоянна по величинѣ и направленію; такую силу называютъ постоянной силой Слѣдовательно, при дѣйствіи на тѣло постоянной силы, тѣло не имѣющее начальной скорости или имѣющее скорость, совпадающую по направленію съ силой, движется прямолинейно и равноперемѣнно

Наблюденія показываютъ, что ускоренія падающихъ тѣлъ для даннаго мѣста на землѣ могутъ быть приняты постоянными; поэтому мы заключаемъ, что и сила тяжести, дѣйствующая на тѣло, называемая вѣсомъ тѣла, есть сила для даннаго мѣста постоянная Обозначая ускореніе ею производимое черезъ g а вѣсъ тѣла черезъ P, найдемъ.

$$m = \frac{P}{g}$$

откуда

$$P = mg \qquad (105)$$

Если сила будетъ сохранять свое направленіе, но по величинѣ будетъ силой перемѣнной, то такимъ же образомъ будетъ измѣняться и ускореніе тѣла, къ которому сила приложена, т. е. тѣло будетъ двигаться прямолинейно и неравноперемѣнно *).

Въ тотъ моментъ, когда сила прекратитъ свое дѣйствіе на тѣло, скорость послѣдняго перестанетъ измѣняться, т. е. тѣло будетъ двигаться равномѣрно и прямолинейно съ той скоростью, которую оно имѣло въ моментъ прекращенія дѣйствія силы. Мы можемъ, слѣдовательно, опредѣлить скорость какого либо перемѣннаго движенія въ данное мгновеніе какъ скорость такого равномѣрнаго движенія, какую бы тѣло имѣло, если бы, начиная съ этого мгновенія, сила перестала дѣйствовать на тѣло; и наоборотъ, если начиная съ даннаго мгновенія, тѣло движется равномѣрно и прямолинейно, то сила, къ нему приложенная, перестала на него дѣйствовать.

Аналогичное опредѣленіе можетъ быть дано и ускоренію перемѣннаго движенія въ данное мгновеніе, при чемъ подъ этимъ ускореніемъ мы можемъ разумѣть ускореніе такого равноперемѣннаго движенія, которое будетъ имѣть тѣло, если сила, къ нему приложенная, съ этого мгновенія сдѣлается постоянной.

§ 132. Графическое изображеніе силъ.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что всякой силѣ кромѣ величины должно быть приписано опредѣленное направленіе, какимъ и служитъ направленіе производимаго силой ускоренія, такъ какъ дѣйствіе силъ и выражается сообщаемыми ими ускореніями. Такимъ образомъ сила представится векторомъ, совпадающимъ по направленію съ ускореніемъ, а по величинѣ пропорціональнымъ ему. Кромѣ направленія и величины въ всякой силѣ отмѣчаютъ еще точку приложенія ея, какой будетъ служить или отдѣльная матеріальная точка, или же въ случаѣ, если сила приложена къ тѣлу, то та точка его, на которую непосредственно дѣйствуетъ разсматриваемая сила. Точка приложенія, направленіе и величина силы — суть три элемента, опредѣляющіе всякую силу.

§ 133. Единицы для измѣренія силъ и массъ.

Оставляя по прежнему основными единицами единицы длины и времени, въ зависимости отъ которыхъ была найдена единица ускоренія, мы видимъ, что въ уравненіе, связывающее между собою силу, массу и ускореніе:

$$F = mw$$

входитъ только одна величина — ускореніе, измѣреніе которой намъ извѣстно. Одну изъ прочихъ по нашему произволу мы можемъ взять за основную; тогда опредѣлится и измѣреніе послѣдней. Если за

*) Прямолинейнымъ движеніе будетъ тогда, когда въ начальное мгновеніе тѣло находилось въ покоѣ или имѣло скорость, совпадающую по направленію съ силой.

основную единицу мы примемъ единицу силы, то найдемъ, что единица массы будетъ масса такого тѣла, которому единица силы сообщаетъ единицу ускоренія, въ такомъ случаѣ единица массы выразится единицей силы, дѣленной на единицу ускоренія, т. е.

$$\text{ед. массы} = \frac{\text{един. силы}}{\text{един. ускоренія}}$$

Силы обыкновенно измѣряютъ въ единицахъ вѣса, такимъ образомъ мы можемъ принять за единицу: 1 пудъ, 1 фунтъ, 1 грамъ, 1 килограмъ и т. д.

Единица ускоренія уже найдена въ кинематикѣ, при чемъ въ зависимости отъ единицъ длины и времени она выражается такъ

$$\text{ед. ускоренія} = \frac{\text{ед. длины}}{(\text{ед. времени})^2}$$

Выражая единицу массы также въ зависимости отъ единицъ разстоянія и времени, найдемъ:

$$\text{ед. массы} = \frac{\text{ед. силы}}{\text{ед. ускоренія}} = \frac{\text{ед. силы}}{\dfrac{\text{ед. разстоян.}}{(\text{ед. времени})^2}} =$$

$$= \frac{\text{ед. силы} \times (\text{ед. времени})^2}{\text{ед. разстоян.}}$$

Таково будетъ измѣреніе единицы массы въ зависимости отъ трехъ единицъ, принятыхъ за основныя.

Но ускореніе, сообщаемое силою тяжести, а слѣдовательно, и вѣсъ тѣла въ различныхъ точкахъ земной поверхности не есть величина постоянная, а потому брать вѣсъ тѣла (силу притяженія тѣла землею) за одну изъ основныхъ единицъ не вполнѣ удобно; вслѣдствіе этого за основную единицу принимаютъ единицу массы, и измѣреніе единицы силы выразится уже въ зависимости отъ единицы массы и другихъ основныхъ единицъ разстоянія и времени. Основываясь на выраженіи

$$F = mv,$$

найдемъ, что

$$\text{ед. силы} = \text{ед. массы} \times \text{ед. ускор.} = \frac{\text{ед. массы} \times \text{ед. разст.}}{(\text{ед. врем.})^2}$$

или, обозначая символически, при чемъ измѣреніе массы — M, измѣреніе длины — L и времени — T, найдемъ, что измѣреніе силы будетъ таково

$$\frac{M \cdot L}{T^2} = MLT^{-2}$$

§ 134. Задачи.

1. Каково будетъ ускореніе, сообщаемое тѣлу вѣсомъ 90 кгр силою въ 750 кгр., полагая $g = \infty 10$ м./сек.²

2. Черезъ блокъ перекинута нить съ подвѣшенными къ концамъ ея грузами P и Q, при чемъ $Q > P$. Опредѣлить ускореніе, съ которымъ грузы придутъ въ движеніе (машина Атвуда). Изслѣдовать рѣшеніе.

3. Найти вѣсъ P и массу m тѣла, которому нѣкоторая сила сообщаетъ ускореніе 2 м./сек.², если та же сила тѣлу вѣсомъ въ 2 кгр сообщаетъ ускореніе въ 6 м.

Рѣшенія задачъ.

1. $$w = \frac{F}{m} = \frac{Fg}{P} = \frac{90 \cdot 10}{750} = 1{,}2 \text{ м./сек}^2$$

2. $$w = \frac{F}{m}, \text{ гдѣ } F = Q - P \text{ и } m = \frac{Q + P}{g};$$

слѣдовательно
$$w = g\,\frac{Q - P}{Q + P}.$$

3. $$P = 6 \text{ кгр}, \quad m = 0{,}6\,\frac{\text{кгр сек}^2}{\text{м}}.$$

§ 135. Метрическая система мѣръ.

Такъ называется система мѣръ, введенная впервые во Франціи въ 1799 г. и существующая до сихъ поръ какъ практическая система мѣръ *).

Основными единицами въ метрической системѣ являются слѣдующія:

1) единица длины — метръ;

2) единица времени — секунда;

3) единица вѣса (силы) — вѣсовой граммъ.

---

*) Комисіей, въ которую вошли Лагранжъ, Лапласъ, Лавуазье, Монжъ, Борда, Кондорсе, Кулонъ, былъ представленъ Французскому Національному Собранію 26 марта 1791 г. докладъ, которымъ за единицу длины принимался метръ, равный $\frac{1}{10\,000.000}$ четверти длины Парижскаго меридіана; 30 марта эта единица была утверждена и по окончаніи необходимыхъ точныхъ измѣреній 10 декабря 1799 г. метръ признанъ обязательнымъ во Франціи (mètre vrai et définitif).

Впослѣдствіи точныя измѣренія астронома Бесселя показали, что французскій метръ составляетъ $\frac{1}{10.000.855}$ четверти меридіана.

Въ 1875 году по иниціативѣ Русской Академіи Наукъ учреждено въ Парижѣ Международное бюро мѣръ и вѣсовъ.

Дальнѣйшія подробности относительно единицъ мѣръ см. О. Хвольсонъ, Объ абсолютныхъ единицахъ въ особенности магнитныхъ и электрическихъ, СПБ. 1881.

Весьма подробно вопросъ о выборѣ системы мѣръ изложенъ у Л. Кирпичева, Начала механики, 1889 г., стр. 347.

Производныя единицы будутъ таковы

единица скорости м. сек.,

единица ускоренія м./сек².,

единица массы—грамъ/ед. ускор.—масса одного грама или масса 9,81 куб. см. дистилированной воды при 4° Ц.

Для наглядности сопоставимъ единицы метрической системы съ русскими.

1 см = 0,39 дм = 0,22 верш

1 метръ = 0,469 саж. = 1,406 арш = 3 28 фут

1 км. = 0,937 верст = 468 7 саж

1 кгр. = 2,44 фн.

1 тонна = 1000 кгр. = 61 пуд.

1 грамъ = 0,00244 фн. = 0,234 золотн

1 дюймъ = 2,54 см.

1 верш. = 4,44 см

1 фут. = 0,305 м.

1 арш. = 0,71 м.

1 верста = 1,067 км.

1 фунтъ = 0,41 кгр.

1 пудъ = 16,38 кгр.

Метрическая система мѣръ принята въ настоящее время почти во всѣхъ государствахъ Западной Европы

Насколько разнообразны и многочисленны были системы мѣръ, употреблявшіяся ранѣе въ различныхъ государствахъ, показываетъ примѣръ швейцарскаго кантона Во (Vaud), гдѣ до 1825 г. существовали совершенно независимыя другъ отъ друга 8 единицъ длины, 8 ед. вѣса, 23 ед объема фруктовъ и 31 ед. объема для жидкостей.

§ 136 Абсолютная система мѣръ.

Изъ числа разнообразныхъ предлагавшихся и существующихъ системъ мѣръ особеннаго вниманія заслуживаетъ такъ называемая абсолютная система мѣръ, принятая на Парижскомъ конгресѣ

Въ этой системѣ основными единицами служатъ:

единица длины—сантиметръ

единица времени—секунда равная $\frac{1}{86400}$ среднихъ солнечныхъ сутокъ,

единица массы—грамъ, представляющій массу одного кубическаго сантиметра дистилированной воды при 4° Ц.

Система эта по своимъ основнымъ единицамъ называется также сантиметро-грамъ-секундной или, короче, системой C. G S по начальнымъ буквамъ этихъ единицъ

Въ такомъ случаѣ единица силы будетъ имѣть измѣреніе

$$\frac{\text{грамъ} \times \text{сантиметръ}}{(\text{секунда})^2}$$

Единица силы носитъ названіе дины; такимъ образомъ дина есть сила, сообщающая массѣ, равной одному граму, ускореніе въ 1 см./сек^2.

Не слѣдуетъ съ грамомъ — единицей массы смѣшивать вѣсовой грамъ — единицу вѣса или силы, представляющій вѣсъ тѣла, масса котораго равна одному граму. Но вѣсовой грамъ не будетъ равенъ и динѣ, какъ это легко видѣть; тѣло, имѣющее массу, равную граму, будетъ падать съ ускореніемъ, съ которымъ падаютъ всѣ тяжелыя тѣла, равнымъ 981 см./сек^2. Паденіе это совершается подъ дѣйствіемъ его собственнаго вѣса, т. е. силы, равной одному вѣсовому граму; послѣдній, слѣдовательно, сообщаетъ тѣлу съ массою въ 1 гр. ускореніе 981 см./сек^2. и будетъ равняться 981 динѣ. Такъ какъ всѣ тѣла въ одномъ и томъ же мѣстѣ земли падаютъ съ одинаковымъ ускореніемъ, то тѣло, вѣсящее 1000 гр. или 1 кгр. будетъ имѣть массу въ 1000 разъ большую, нежели 1 грамъ.

Величина ускоренія g, сообщаемаго силою тяжести, измѣняется во-первыхъ въ зависимости отъ широты, а во-вторыхъ въ зависимости отъ разстоянія тѣла отъ центра земли. Ускореніе g для широты въ 45° равно 9,806 м./сек.^{2}; для всякой другой широты α можно воспользоваться формулой:

$$g_\alpha = g_{45°}(1 - 0{,}00259 \cos 2\alpha).$$

Такъ напр. подъ экваторомъ $g = 9{,}781$, на полюсѣ $g = 9{,}832$.

Измѣненіе g въ зависимости отъ разстоянія тѣла отъ центра земли можетъ быть выражено формулой:

$$g_{(R+h)} = g_R(1 - 0{,}00000032\,h)$$

гдѣ g_R ускореніе на разстояніи R отъ центра земли, $(R + h)$ — разстояніе тѣла отъ центра земли.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ вездѣ принимать g равнымъ 9,81 м./сек.^{2}, для приблизительныхъ же подсчетовъ можно взять и 10 м./сек.^{2}

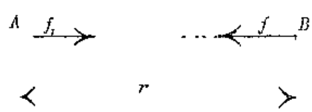
§ 137. Начало противодѣйствія.

Начало противодѣйствія является третьимъ началомъ динамики. Изъ указанныхъ двухъ началъ: косности и независимости — первое относится къ тѣламъ, находящимся внѣ дѣйствія другихъ тѣлъ, второе устанавливаетъ законы дѣйствія другихъ тѣлъ на данное тѣло, наконецъ, начало противодѣйствія относится къ взаимодѣйствію между двумя тѣлами: оно указываетъ данныя, касающіяся силъ, дѣйствующихъ между тѣлами или, вѣрнѣе, точками.

Начало это состоитъ въ слѣдующемъ: во-первыхъ, силы, дѣйствующія между двумя точками, взаимны, т. е. если одна точка дѣйствуетъ на другую, то и послѣдняя дѣйствуетъ на первую. Во-вторыхъ, обѣ силы направлены по прямой, соединяющей обѣ точки. Въ третьихъ, если одна точка A притягиваетъ (фиг. 128) или отталкиваетъ (фиг. 129) другую точку B, то и вторая оказываетъ на первую соотвѣтственно то же самое дѣйствіе; въ четвертыхъ, силы эти по величинѣ равны, т. е. дѣйствіе равно противодѣйствію; на фиг. 128 и 129 $f = f_1$.

Примѣровъ, подтверждающихъ начало противодѣйствія, можно привести очень много, ограничимся слѣдующими.

При нажатіи на какое-либо тѣло мы ощущаемъ со стороны послѣдняго давленіе, равное по величинѣ той силѣ, съ какой мы нажимаемъ на тѣло.



128.

Тѣло, лежащее напр. на горизонтальной доскѣ, оказывая на нее давленіе, равное своему вѣсу, испытываетъ такой же величины давленіе со стороны доски, такъ какъ если бы давленіе это было больше или меньше, то тѣло получило бы ускореніе въ ту или другую сторону по вертикальному направленію.

Лошадь, везущая повозку, испытываетъ со стороны послѣдней то же самое усиліе тяги, какое оказываетъ на повозку, что можно обнаружить, вставивъ между ними два динамометра, обращенные въ разныя стороны. Не трудно объяснить, почему однако повозка движется въ сторону лошади, а не наоборотъ (взаимодѣйствіе между копытами лошади и землей).

129

Извѣстенъ далѣе опытъ Ньютона для доказательства разсматриваемаго начала. Онъ положилъ на одинъ плавающій сосудъ кусокъ желѣза, на другой — магнитъ и привелъ ихъ въ соприкосновеніе. Когда ни тотъ, ни другой не перетянули всю систему въ свою сторону, онъ вывелъ заключеніе, что оба притягиваются другъ другомъ съ равными силами.

Земля притягиваетъ тяжелыя тѣла, но и послѣднія притягиваютъ землю съ той же самой силой. Можно спросить: почему однако движутся эти тѣла, а не земля? Прежде всего замѣтимъ, что мы, находясь неподвижно на поверхности земли, не можемъ судить объ абсолютномъ движеніи напр. падающаго камня и земли, а только о движеніи перваго, но нѣтъ сомнѣнія, что и земля должна перемѣститься соотвѣтственнымъ образомъ въ направленіи къ камню; только пере мѣщеніе это вслѣдствіе значительно большей массы земли по сравненію съ камнемъ будетъ чрезвычайно мало, такъ какъ ускоренія, ими испытываемыя, производятся одинаковыми по величинѣ силами и потому будутъ обратно пропорціональны ихъ массамъ. Дѣйствительно, назвавъ массу земли — M, а камня — m, ускоренія, ими получаемыя, соотвѣтственно — W и w, на основаніи начала противодѣйствія будемъ имѣть

$$MW = mw.$$

Отсюда

$$\frac{W}{w} = \frac{m}{M}.$$

Законъ противодѣйствія можетъ быть подтвержденъ также опытами надъ растяженіемъ тѣлъ *).

«Возьмемъ тонкую проволоку, положимъ въ 100 футъ длиною, и неподвижно укрѣпимъ ее, напримѣръ, верхнимъ концомъ; къ нижнему же концу приложимъ нѣкоторую небольшую силу, напр. привѣсимъ гирю не очень значительнаго вѣса, мы увидимъ, что подъ дѣйствіемъ силы, равной вѣсу гири, проволока вытянется на нѣкоторую небольшую длину, положимъ на одинъ дюймъ. Отнимемъ затѣмъ гирю; мы увидимъ, что проволока начнетъ укорачиваться и въ скоромъ времени затѣмъ приметъ свою первоначальную длину въ 100 фут.

Если бы на этой же проволокѣ прежде, чѣмъ подвергать ее опыту, мы сдѣлали отмѣтки на разстояніяхъ 25, 50 и 75 футъ отъ верхняго конца, то по положенію ихъ на вытянутой проволокѣ могли бы судить о томъ, какъ вытягиваются различныя ея части; во взятомъ нами примѣрѣ мы нашли бы, что всѣ части проволоки вытягиваются одинаково, т. е. при удлиненіи ея на одинъ дюймъ, каждая ея четверть становится на четверть дюйма длиннѣе; точно также нашли бы, что пятая доля становится длиннѣе на $^1/_5$ дюйма и т. д. Отсюда прямо выводимъ заключеніе, что при растягиваніи проволоки какою ни есть силою расположенныя по ея длинѣ частицы одинаково отодвигаются одна отъ другой, ихъ взаимное разстояніе всюду увеличивается на одну и ту же длину.

Если теперь съ этой проволоки снимемъ гирю и, оставивъ ее притти въ прежнее положеніе, разрѣжемъ на четыре равныя части, а затѣмъ каждую часть отдѣльно начнемъ растягивать съ помощью той же самой гири, которая прежде была употреблена на растяженіе всего тѣла длиною въ 100 футъ, то мы увидимъ, что и теперь каждая отдѣльная часть тѣла, которой длина будетъ 25 футъ, вытянется на $^1/_4$ дюйма точно такъ же, какъ и въ томъ случаѣ, когда всѣ части тѣла составляли одно цѣлое. Отсюда видимъ, что частица

*) Вышнеградскій, Элементарная механика, 1860 г. стр. 181 и 189.

оканчивающая собою каждую четверть проволоки (а слѣдовательно и каждая частица тѣла) удаляется отъ смежныхъ точно такъ, какъ будто ее книзу тянетъ та же самая гиря которая привѣшена къ концу проволоки. Замѣтивъ это, вспомнимъ, что на концѣ A дѣйствуетъ по направленію книзу вѣсъ гири, привѣшенной къ проволокѣ, и по направленію кверху — притяженіе отъ слѣдующей за A частицы B. Такъ какъ подъ вліяніемъ этихъ силъ частица A находится въ равновѣсіи, то значитъ притяженіе A къ B будетъ равно вѣсу гири, но частицу B, какъ мы уже замѣтили, тянетъ книзу такая же сила, которая тянетъ книзу и A; слѣдовательно на нее дѣйствуетъ книзу также сила равная вѣсу гири; по направленію же книзу на нее можетъ дѣйствовать только притяженіе B къ A, слѣдовательно, это притяженіе будетъ также равно вѣсу гири, а по этому мы видимъ, что если двѣ частицы A и B притягиваютъ одна другую, то частица A притягивается къ B съ точно такою же силою, съ какою B притягивается къ A. Совершенно тотъ же результатъ мы нашли бы для отталкивательныхъ силъ, разсматривая явленіе сжатія вмѣсто явленія растяженія, — такъ что вообще мы видимъ, что притягательныя и отталкивательныя силы, производящія связь между частицами матеріи, входящими въ составъ тѣлъ подчинены слѣдующему весьма простому закону: если двѣ частицы матеріи дѣйствуютъ одна на другую, то ихъ дѣйствіе представляется или въ видѣ притягательной или въ видѣ отталкивательной силы и притомъ, если одна частица притягиваетъ другую съ извѣстнымъ усиліемъ, то и вторая притягиваетъ первую съ тѣмъ же самымъ усиліемъ; если же первая отталкиваетъ вторую съ извѣстнымъ усиліемъ, то вторая отталкиваетъ первую съ тѣмъ же самымъ усиліемъ».

§ 138. Програма и раздѣленіе динамики

Общій планъ изложенія динамики можетъ быть основанъ на слѣдующихъ соображеніяхъ:

Всѣ тѣла природы представляютъ соединеніе отдѣльныхъ матерьяльныхъ частицъ, являющихся неизмѣнными при нашемъ изслѣдованіи, и движеніе тѣлъ составляетъ такимъ образомъ ни что иное, какъ движеніе его частицъ, поэтому ученіе о движеніи матерьяльной частицы или матерьяльной точки должно составлять основу всей динамики.

Но выводы, относящіеся къ движенію отдѣльной или, какъ говорятъ, свободной матерьяльной точки, не могутъ быть непосредственно распространены на любую точку тѣла, такъ какъ точки послѣдняго кромѣ силъ, обязанныхъ своимъ происхожденіемъ присутствію другихъ тѣлъ, подвержены еще вліяніямъ съ механической точки зрѣнія со стороны другихъ точекъ тѣла

Ввиду только что сказаннаго отдѣльно отъ динамики свободной точки, должна быть разсмотрѣна динамика несвободной точки на относящихся сюда заключеніяхъ и можетъ быть основана динамика тѣлъ или системъ матерьяльныхъ точекъ.

§ 139. Кинетика и статика.

Совокупность или система силъ, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ или тѣлу, будетъ, вообще говоря, измѣнять состояніе ихъ (скорость), т. е. сообщить извѣстное ускореніе. Въ частномъ случаѣ система силъ можетъ быть такой, что состояніе точки не измѣнится, другими словами, ускореніе, сообщаемое этой системой, будетъ равно нулю. Подобная система будетъ системой силъ взаимно уравновѣшивающихся; про такую систему говорятъ, что силы ея находятся въ равновѣсіи.

Два указанныхъ случая, представляясь наиболѣе рѣзко между собою различающимися, разсматриваются въ отдѣльныхъ частяхъ динамики — кинетикѣ и статикѣ.

Содержаніе кинетики, изучающей зависимость, существующую между силами и движеніемъ матерьяльныхъ точекъ и тѣлъ, находящихся подъ дѣйствіемъ силъ, заключается въ рѣшеніи слѣдующихъ вопросовъ:

1) По данному движенію точки или тѣла, заданному однимъ изъ указанныхъ въ кинематикѣ способовъ, опредѣлить силы, на нихъ дѣйствующія, или

2) по даннымъ силамъ, дѣйствующимъ на точку или тѣло, опредѣлить движеніе ихъ.

Въ статикѣ силы, приложенныя къ тѣлу, разсматриваются въ своей совокупности въ одно и то же мгновеніе; время непосредственно въ изслѣдованіяхъ статики отсутствуетъ. Вслѣдствіе этого послѣдняя пріобрѣтаетъ характеръ геометрическій, особенно, если мы вспомнимъ, что всякая сила можетъ быть выражена приличнымъ образомъ подобраннымъ векторомъ.

Часто подраздѣляютъ кинетику на динамику и статику, придавая слѣдовательно другой смыслъ терминамъ динамики и кинетики. Мы отдаемъ, однако, рѣшительное предпочтеніе указанному выше подраздѣленію, такъ какъ терминъ кинетика спеціально указываетъ на движеніе; такъ напр. говорятъ кинетическая энергія, кинетическая теорія газовъ и т. п. Содержаніемъ же динамики (отъ слова — сила) естественно должно быть вообще ученіе о силахъ, въ которое войдутъ какъ установленіе зависимости между силами и элементами движенія (кинетика), такъ и опредѣленіе соотношеній только между силами (статика).

§ 140. Сложеніе и разложеніе силъ.

Для того, чтобы отвѣтить на поставленные въ предыдущемъ параграфѣ вопросы, часто представляется необходимость особенно при значительномъ количествѣ приложенныхъ къ тѣлу силъ, въ замѣнѣ этихъ силъ другимъ меньшимъ числомъ силъ,—въ частномъ случаѣ одной силой — такихъ, чтобы дѣйствіе, производимое ими на тѣло было то же самое, что и силами, дѣйствительно приложенными. Такія системы силъ называются равнодѣйствующими. Если мы замѣняемъ нѣсколько силъ одной, то послѣднюю называютъ равнодѣйствующей силой, а первыя — слагаемыми или составляющими, самое же дѣйствіе носитъ названіе сложенія силъ. Иногда, какъ это впослѣдствіи будетъ показано, встрѣчается необходимость и въ обратномъ дѣйствіи въ замѣнѣ одной силы нѣсколькими: такое дѣйствіе извѣстно подъ именемъ разложенія силъ.

I Динамика точки

ГЛАВА XIII

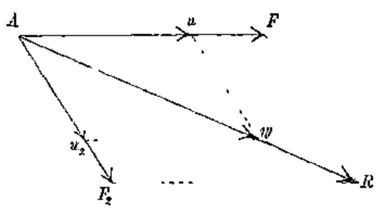
Зависимость между силами, приложенными къ точкѣ *)

§ 141. Сложенiе и разложенiе силъ, дѣйствующихъ на точку.

Пусть на точку A (фиг. 130) дѣйствуютъ въ данное мгновенiе силы F_1 и F_2 **). Въ такомъ случаѣ ускоренiя производимыя каждой изъ нихъ, найдутся изъ выраженiй (104):

$$w_1 = \frac{F_1}{m}; \quad w_2 = \frac{F_2}{m}$$

Ускоренiя эти могутъ быть представлены прямолинейными отрѣзками w_1 и w_2, совпадающими по направленiю съ соотвѣтствующими силами и пропорцiональными ихъ величинамъ. Точка A имѣетъ такимъ образомъ два ускоренiя, которыя и могутъ быть сложены по извѣстному правилу паралелограма ускоренiй, при чемъ мы найдемъ составное ускоренiе w.



130

Но это ускоренiе можетъ быть произведено дѣйствiемъ одной силы R, опредѣляемой изъ выраженiя

$$R = mw,$$

при чемъ и по направленiю она будетъ совпадать съ ускоренiемъ w.

Но

$$F_1 = mw_1$$
$$F_2 = mw_2$$

---

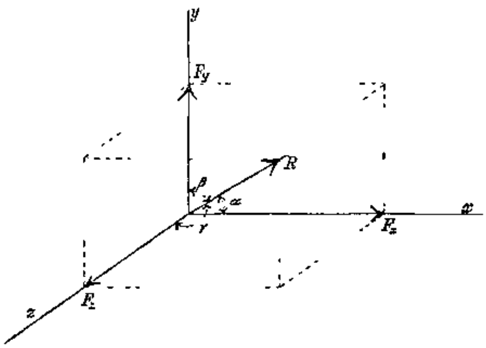
*) Вопросы, разсматриваемые въ настоящей главѣ, какъ ясно изъ содержанiя ея составляютъ предметъ статики матерiальной точки.

**) Добавленiе «въ данное мгновенiе» существенно необходимо, потому что силы могутъ быть непостоянны по величинѣ и направленiю, являясь, вообще говоря, функцiями времени

а потому
$$\frac{F_1}{w_1} = \frac{F_2}{u_2} = \frac{P}{u}$$

Если мы, слѣдовательно, отложимъ на линіи Aw отрѣзокъ R и соединимъ точки R и F_1 прямой, то получимъ два подобныхъ треугольника Aw_1w и AF_1R (общій уголъ и двѣ пропорціональныя стороны). Слѣдовательно линія RF_1 паралельна ww_1, а на основаніи написаннаго равенства равна F_2.

Сила R будетъ замыкающею стороною треугольника AF_1R или діагональю паралелограма AF_1RF_2, построеннаго на данныхъ силахъ а потому мы можемъ формулировать правило сложенія силъ дѣйствующихъ на точку, такъ. равнодѣйствующая двухъ силъ приложенныхъ къ точкѣ, выражается по величинѣ и направленію діагональю паралелограма, построеннаго на силахъ составляющихъ иначе замыкающею стороною треугольника, построеннаго на силахъ составляющихъ или равнодѣйствующая сила равна геометрической суммѣ составляющихъ силъ.



131

На основаніи перваго опредѣленія правило это называется паралелограмомъ силъ.

Силы такимъ образомъ складываются по правиламъ сложенія векторовъ (а также хордъ перемѣщеній скоростей и ускореній) а потому можемъ сказать:

Равнодѣйствующая R нѣсколькихъ силъ $F_1, F_2, F_3, \ldots$, дѣйствующихъ на точку равна геометрической суммѣ силъ составляющихъ, т. е.

$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3} + \ldots = \sum_1^n \overline{F} \qquad (106)$$

Проекція равнодѣйствующей на какое-либо направленіе l равна суммѣ проекцій силъ составляющихъ, т. е.

$$R\cos(R, l) = \sum_{1}^{n} F\cos(F, l) \qquad (107)$$

Обозначенія: R — для силы равнодѣйствующей и $F_1, F_2, F_3, \ldots$ для силъ составляющихъ удержимъ и впредь. Если на точку дѣйствуютъ три силы F_x, F_y, F_z, направленія которыхъ между собою перпендикулярны (заданы по тремъ осямъ OX, OY, OZ), то имѣемъ (фиг. 131):

$$R = \overline{F_x + F_y + F_z} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}. \qquad (108)$$

Углы, составляемые равнодѣйствующей съ каждой изъ составляющихъ, найдутся изъ соотношеній:

$$\left.\begin{aligned}
\cos(R, x) &= \cos\alpha = \frac{F_x}{R} = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} \\
\cos(R, y) &= \cos\beta = \frac{F_y}{R} = \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} \\
\cos(R, z) &= \cos\gamma = \frac{F_z}{R} = \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}
\end{aligned}\right\} \qquad (109)$$

Обратно, если сила R должна быть разложена по тремъ даннымъ направленіямъ, то извѣстными будутъ R, α, β, γ; значенія составляющихъ найдутся изъ трехъ послѣднихъ уравненій, и найденныя величины будутъ удовлетворять уравненію (108). Вопросъ даетъ одно опредѣленное рѣшеніе.

Изъ частныхъ случаевъ должны быть упомянуты слѣдующіе:

1) $F_z = 0$; имѣемъ прямоугольникъ силъ.

2) Силы, дѣйствующія на точку, направлены по прямой. Равнодѣйствующая равна алгебраической суммѣ силъ составляющихъ

$$R = \sum_{1}^{n} F$$

гдѣ n — число силъ.

§ 142. Условія равновѣсія силъ, дѣйствующихъ на точку. Уравненія равновѣсія.

Для того, что бы силы, дѣйствующія на данную точку, находились въ данное мгновеніе въ равновѣсіи, т. е. чтобы онѣ не измѣняли состоянія точки, необходимо, чтобы составное ускореніе ими производимое, было равно нулю; а такъ какъ

$$R = mw$$

и m не равно нулю, то должно быть $R = 0$, т. е. для сохраненія состоянія (скорости) точки равнодѣйствующая всѣхъ силъ къ ней приложенныхъ, должна быть равна нулю.

Условіе это можетъ быть формулировано и иначе, припоминая что

$$R = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \ldots$$

а именно: для сохраненія скорости точки геометрическая сумма всѣхъ приложенныхъ къ ней силъ должна быть равна нулю или всѣ силы должны составлять замкнутый многоугольникъ.

Но если $R = 0$, то и проекція ея на любое направленіе равна нулю, т. е.

$$R \cos (R, l) = \sum_1^n F \cos (F, l) = 0$$

А для того, чтобы R равнялась нулю, какъ извѣстно изъ теоріи векторовъ, необходимо и достаточно, чтобы проекціи ея на три взаимно-перпендикулярныя оси были въ отдѣльности равны нулю (§ 21).

Обозначая проекціи R черезъ X, Y, Z, проекціи F_1 черезъ F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, проекціи F_2 — F_{2x}, F_{2y}, F_{2z} и т. д., будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} X &= \sum F \cos (F, x) = \sum F_x = 0 \\ Y &= \sum F \cos (F, y) = \sum F_y = 0 \\ Z &= \sum F \cos (F, z) = \sum F_z = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (110)$$

что можетъ быть формулировано такъ: для равновѣсія силъ, дѣйствующихъ на точку, суммы ихъ проекцій на три взаимно-перпендикулярныя оси порознь должны быть равны нулю или, что то же, алгебраическія суммы составляющихъ ихъ разложенныхъ по тремъ прямоугольнымъ осямъ, должны быть равны нулю для каждой оси въ отдѣльности. Три послѣднія уравненія (110), выражающія условія равновѣсія данныхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ, носятъ названіе уравненій равновѣсія точки.

§ 143. Задачи.

1. Составляющая трехъ взаимно перпендикулярныхъ силъ X, Y и Z равна 60 кгр., $X = 8$ кгр., $Y = 28$ кгр. Найти Z.

2. Замѣнить силу въ 20 кгр., приложенную къ точкѣ, двумя другими, составляющими съ нею углы по 30°.

---

*) Въ скобкахъ указаны составляющія каждой силы соотвѣтственно по осямъ Ox, Oy и Oz.

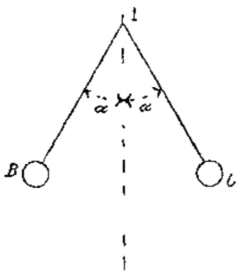
3. На точку дѣйствуютъ силы: F_1 (4, 7, 0) *), F_2 (−2, 3, 1) и F_3 (0, —3, —1). а) Найти равнодѣйствующую силъ.

б) Опредѣлить родъ движенія по каждой оси.

в) Что необходимо имѣть кромѣ силъ для полнаго опредѣленія движенія?

4. Найти равнодѣйствующую R шести силъ въ 8, 15, 22, 29, 36 и 43 кгр., изъ которыхъ каждая съ двумя сосѣдними образуетъ уголъ въ 60°.

5. Найти уголъ α образуемый стержнями AB и AC (фиг. 132) коническаго (центробѣжнаго) регулятора, если длина $AB = AC = 30$ снм. и ось регулятора дѣлаетъ 120 обор. въ минуту.



132

Рѣшенія задачъ.

1. $Z = \sqrt{60^2 - (8^2 + 28^2)}$

2. Каждая изъ силъ равна $\frac{10}{\cos 30^\circ}$

3. а) R (2, 7, 0).

б) Ось Ox — равноускоренное, Oy — перемѣнное ускоренное, Oz — равномѣрное.

в) 1. Массу точки m. 2. v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0} и 3. x_0, y_0, z_0.

4. $R = 42$ кгр. и совпадаетъ съ пятой силой.

5. Равнодѣйствующая вѣса шара и центробѣжной силы или соотвѣтственно ускореніе, составленное изъ ускореній, соотвѣтствующихъ этимъ силамъ, направляется по стержню AB. При этомъ имѣемъ соотношеніе:

$$tg\,\alpha = \frac{v^2}{r} : g \quad \text{гдѣ } v = \frac{2\pi r n}{60}, \quad \text{а } r = 30 \sin \alpha.$$

Отсюда находимъ

$$\cos \alpha = \frac{30 g}{\pi^2 n^2} \sim \frac{30}{n^2}$$

ГЛАВА XIV

Зависимость между силами и движеніемъ точки

§ 144. Уравненія движенія.

Пусть на данную матерьяльную точку, имѣющую массу m, дѣйствуютъ силы $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3 \ldots \overline{F}_n$ и сообщаютъ ей ускореніе $\overline{w}$.

Равнодѣйствующую этихъ силъ получимъ изъ выраженія:

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \ldots + \overline{F}_n = \sum_1^n \overline{F}$$

А затѣмъ имѣемъ

$$\overline{R} = m\overline{w} \tag{111}$$

Это уравненіе называется **уравненіемъ движенія точки**, такъ какъ оно, указывая зависимость между силами, приложенными къ точкѣ, и ускореніемъ ея, позволяетъ опредѣлить силы по данному движенію точки. Если же будутъ даны силы, то при помощи этого уравненія могутъ быть найдены: ускореніе, скорость и разстояніе, т. е. кинематическіе элементы движенія точки въ зависимости отъ времени.

Приложенныя къ точкѣ силы даются въ функціяхъ времени. Но такъ какъ силы кромѣ величинъ имѣютъ опредѣленныя направленія, то должны быть указаны эти послѣднія, что усложняетъ, вообще говоря, заданіе силъ. Ввиду этого наиболѣе простымъ будетъ разложеніе каждой изъ данныхъ силъ по тремъ опредѣленнымъ взаимноперпендикулярнымъ направленіемъ и затѣмъ заданіе силъ посредствомъ составляющихъ или, что то же, проекцій ихъ на эти направленія, которыя обозначимъ, согласно принятому, черезъ Ox, Oy, Oz.

Тогда для силъ и проекцій ихъ будемъ имѣть:

$$\overline{F}_1 = \overline{X}_1 + \overline{Y}_1 + \overline{Z}_1$$
$$\overline{F}_2 = \overline{X}_2 + \overline{Y}_2 + \overline{Z}_2$$
$$\ldots\ldots$$
$$\overline{F}_n = \overline{X}_n + \overline{Y}_n + \overline{Z}_n$$

Обозначая проекціи равнодѣйствующей черезъ $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ получимъ

$$\overline{R} = \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$$

и слѣдовательно

$$\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z} = m\overline{w}$$

Беря проекціи обѣихъ частей послѣдняго выраженія поочередно на каждую изъ осей Ox, Oy и Oz, найдемъ

$$\left.\begin{aligned} X &= mw_x \\ Y &= mw_y \\ Z &= mw_z \end{aligned}\right\} \qquad (112)$$

Уравненія эти называются **уравненіями движенія точки по тремъ прямоугольнымъ осямъ координатъ.**

Замѣтимъ, что уравненія эти являются основой для всѣхъ дальнѣйшихъ выводовъ динамики и вслѣдствіе этого пріобрѣтаютъ весьма важное значеніе.

§ 145. Опредѣленіе силъ по данному движенію точки.

Пусть движеніе точки будетъ дано зависимостями координатъ ея отъ времени:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t) \quad z = f_3(t)$$

или въ случаѣ плоской траекторіи

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t)$$

Кромѣ того должна быть дана масса разсматриваемой точки m.

Уравненія (112) связываютъ силы съ ускореніями; поэтому предварительно найдемъ по данному движенію точки ускореніе ея. Имѣемъ послѣдовательно:

$$v_x = \text{пр}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right), \quad v_y = \text{пр}\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right) \quad v_z = \text{пр.}\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right);$$

$$k_x = \text{пр}\left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\right), \quad k_y = \text{пр}\left(\frac{\Delta v_y}{\Delta t}\right); \quad k_z = \text{пр}\left(\frac{\Delta v_z}{\Delta t}\right).$$

Но такъ какъ движенія по осямъ суть движенія прямолинейныя, то

$$k_x = w_x, \quad k_y = w_y; \quad k_z = w_z$$

На основаніи уравненій (112), находимъ:

$$\begin{aligned} X &= mw_x = mk_x \\ Y &= mw_y = mk_y, \\ Z &= mw_z = mk_z. \end{aligned}$$

Величина равнодѣйствующей найдется изъ выраженія

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \\ &= m\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}. \end{aligned}$$

Косинусы угловъ составляемыхъ силой R съ осями будутъ равны

$$\cos(R, x) = \frac{X}{R}, \quad \cos(R, y) = \frac{Y}{R}, \quad \cos(R, z) = \frac{Z}{R}$$

Вопросъ такимъ образомъ рѣшенъ. Нужно помнить, что такъ какъ X, Y, Z, а затѣмъ v_x, v_y и v_z и k_x, k_y и k_z представляютъ, вообще говоря, нѣкоторыя функціи времени (въ данномъ случаѣ извѣстныя такъ какъ извѣстна зависимость x, y и z отъ t), то и X, Y, Z, а также R суть также функціи времени

Замѣтимъ, что здѣсь мы можемъ найти только равнодѣйствующую всѣхъ силъ, но не составляющія силы въ отдѣльности; послѣдній вопросъ будетъ вообще говоря, неопредѣленнымъ потому, что одна и та же сила можетъ быть разложена въ свою очередь на рядъ другихъ весьма разнообразными способами.

§ 146. Опредѣленіе движенія точки по даннымъ силамъ

Дано: 1) масса точки m, 2) приложенныя къ точкѣ силы, указанныя проекціями ихъ на три прямоугольныя оси а именно:

$$F_1 \ldots X_1,\ Y_1,\ Z_1$$
$$F_2 \ldots X_2,\ Y_2,\ Z_2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$F_n \ldots X_n,\ Y_n,\ Z_n,$$

при чемъ проекціи эти суть, вообще говоря, функціи времени, 3) проекціи начальной скорости v_0 на оси координатъ — v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0} и 4) начальное положеніе точки — x_0, y_0, z_0

Требуется опредѣлить движеніе точки Сложивъ одноименныя проекціи, получимъ:

$$X = \sum_1 X_i \quad Y = \sum_1 Y_i \quad Z = \sum_1 Z_i$$

По уравненіямъ (112) имѣемъ

$$X = mw_x, \quad Y = mw_y \quad Z = mw_z$$

Такъ какъ полное ускореніе w по каждой изъ осей равно касательному ускоренію k по той же оси то находимъ

$$w_x = k_x = \frac{X}{m} \quad w_y = k_y = \frac{Y}{m} \quad w_z = k_z = \frac{Z}{m}$$

Зная k_x, k_y и k_z и пользуясь извѣстными формулами кинематики (78 § 98 и 77, § 93), получимъ послѣдовательно:

$$v_x = v_{x_0} + \text{пр} \sum k_x \Delta t$$
$$v_y = v_{y_0} + \text{пр} \sum k_y \Delta t$$
$$v_z = v_{z_0} + \text{пр} \sum k_z \Delta t$$

а также

$$x = x_0 + \text{пр} \sum v_x \Delta t$$
$$y = y_0 + \text{пр.} \sum v_y \Delta t$$
$$z = z_0 + \text{пр} \sum v_z \Delta t$$

Послѣдния три уравненія и представять искомыя зависимости координатъ движущейся точки отъ времени, опредѣляющія движеніе точки.

Въ частномъ случаѣ, если напр. $X = 0$, то $k_x = 0$ и $v_x = v_{x_0}$, т. е. проекція скорости на ось Ox сохраняетъ свою величину.

Если суммы проекцій силъ на каждую изъ трехъ осей равны нулю, т. е.

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0 \quad \text{и} \quad R = 0$$

то

$$v_x = v_{x_0}, \quad v_y = v_{y_0}, \quad v_z = v_{z_0},$$

а слѣдовательно и

$$V = v_x + v_y + v_z = V_{x_0}$$

т. е. точка сохраняетъ свою скорость или, что то же, свое состояніе.

Мы выше уже имѣли (§ 84, мелкій шрифтъ), что проекціи ускоренія выражаются вторыми производными отъ соотвѣтствующихъ координатъ по времени, а потому для проекцій силы на три оси можемъ написать:

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2},$$
$$Y = m\frac{d^2y}{dt^2},$$
$$Z = m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Задача разысканія на основаніи этихъ уравненій зависимостей координатъ отъ времени сводится къ двойному интегрированію приведенныхъ уравненій. При этомъ войдутъ шесть постоянныхъ произвольныхъ, изъ которыхъ три представляютъ проекціи скорости, а три—координаты движущейся точки для нѣкотораго—обыкновенно начальнаго—мгновенія.

§ 147. Проекціи равнодѣйствующей силы на касательную и нормаль

Проекціи равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ данной точкѣ, на направленія касательной и главной нормали легко опредѣлятся изъ соотвѣтственныхъ выраженій проекцій полнаго ускоренія. Сохраняя принятыя выше обозначенія (§ 71), имѣемъ:

$$w = k + n,$$

$$k = \text{пр}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) \quad n = \frac{v^2}{r}.$$

Если масса точки m, то проекція равнодѣйствующей на касательную будетъ:

$$R_k = mk = m \cdot \text{пр} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) \tag{113}$$

проекція на нормаль (центростремительная сила)

$$R_n = mn = \frac{mv^2}{r}. \tag{114}$$

Всѣ выводы, сдѣланные выше о характерѣ движенія (видѣ траекторіи, скорости движенія, ускореніи его) на основаніи значеній обоихъ ускореній въ частныхъ случаяхъ движенія (§ 76) могутъ быть получены и изъ выраженій касательной и центростремительной силъ.

§ 148. Задачи.

1. Тѣло вѣсомъ 36 кгр. движется равноускоренно, при чемъ въ первую минуту проходитъ 72 м. Найти силу, производящую подобное движеніе, принимая $g = \infty 10$ м./сек.^{2}

2. Требуется поднять грузъ въ 25 кгр. на высоту 10 метр. въ теченіе 2 сек. Найти силу, растягивающую веревку при подъемѣ, предполагая движеніе равноускореннымъ, а $g = \infty 10$ м./сек.^{2}

3. На какое разрывающее усиліе долженъ быть расчитанъ канатъ лебедки, поднимающей 50 шт. кирпича на высоту 2,4 метр. съ средней скоростью 58,8 м./мин., предполагая движеніе груза равноускореннымъ. Вѣсъ кирпича равенъ 10 фунт.

4. Тѣло, вѣсъ котораго равняется Q, поднимается постоянной силой P въ вертикальномъ направленіи и по истеченіи извѣстнаго промежутка времени достигаетъ высоты H. Найти скорость, которую имѣетъ тѣло, и время подъема.

5. Для подъема молота вѣсомъ въ 500 кгр. служитъ паръ при давленіи въ 3,5 атм., дѣйствующій на поршень, площадью 420 кв. см. Послѣ того какъ молотъ поднялся на 0,4 метра, паръ закрываютъ.

а) На какую высоту поднимется еще молотъ?

б) Съ какой скоростью упадетъ онъ внизъ при ударѣ?

6. Тѣло, вѣсомъ 5 кгр., движется по кругу, радіусъ котораго равенъ 10 метр., со скоростью 4 м. въ секунду. Найти центростремительную силу.

7. Найти центростремительную силу, дѣйствующую на матерьяльную точку вѣсомъ 5 кгр. находящуюся на разстояніи 40 см. отъ оси вращенія и совершающую 900 оборотовъ въ минуту.

8. Два шара, вѣсомъ 0,07 и 0,12 кгр, соединенные между собою цѣпью, движутся безъ тренія на горизонтальномъ стержнѣ, вращающемся около вертикальной оси (въ центробѣжной машинѣ). Удаленіе перваго шара отъ центра равно 9 см. На какое разстояніе слѣ

дуетъ удалить второй шаръ съ тѣмъ, чтобы при произвольной угловой скорости вращенія машины оба шара сохранили свое положеніе?

9. Шнурокъ, длиною 2 фута, разрывается силою 25 фунт. Къ одному концу шнурка привязали пулю и начали вращать ее около другого конца шнурка. При скорости пули 150 фут./сек. шнурокъ разорвался. Какъ великъ вѣсъ пули?

10. Къ шнурку такой же крѣпости, но вдвое большей длины (см. предыдущую задачу) привязанъ камень въ 5 фунтовъ вѣсомъ.

а) При какой скорости камня разорвется шнурокъ?

б) Каково будетъ при этомъ число оборотовъ въ мин.?

11. Какой уголъ съ горизонтомъ образуетъ всадникъ, ѣдущій со скоростью 4 м./сек., по кругу радіусомъ 2,5 м.

12. Тѣло вѣсомъ 10 кгр движется по кругу, радіусъ котораго равенъ 12 м., равноускоренно, при чемъ въ 10 сек. проходитъ разстояніе въ 30 м ($g = \infty 10$ м./сек.^{2}).

а) Найти значенія центростремительной силы N въ концѣ 2, 4, 6, 8 и 10-ой секундъ.

б) Построить графическую зависимость силы N отъ времени ($N = f(t)$).

в) Построить зависимость $N = f(s)$.

г) Найти зависимость касательной силы K отъ времени.

д) Найти равнодѣйствующую силу R для $t = 0$, 2, 4, 6, 8 и 10 сек.

Рѣшенія задачъ.

1. $R = 0{,}144$ кгр.

2. $F = 25 + mk = 25 + 2{,}5 \cdot 5 = 37{,}5$ кгр

3. $205 + 16{,}4 = 221{,}4$ кгр

4. $v = \sqrt{2gH\frac{P-Q}{Q}}$; $t = \sqrt{\frac{2H}{g}\cdot\frac{Q}{P-Q}}$

5. а) 0,815 м б) 4,833 м./сек

6. 0,8 кгр

7. $v = 37{,}7$ м $N = 1813$ кгр

8. 5,25 см.

9. 0,0716 фун.

10. а) 3,94 фут./сек б) 94

11. $tg\,\alpha = 0{,}652$.

12. а) б) $v = 0{,}6\,t$. Центробѣжная сила $N = m\frac{v^2}{r} = \frac{(0{,}6\,t)^2}{12} = 0{,}03\,t^2$

в) Имѣемъ: $N = 0{,}03\,t^2$, $s = 0{,}3\,t^2$, откуда по исключеніи t найдемъ. $N = 0{,}1\,s$, что не трудно построить въ осяхъ (N, s).

г) Ускореніе $k = 0{,}6$, а потому касательная сила $K = 0{,}6$ кгр ($m = 1$)

д) $R = \sqrt{K^2 + N^2}$

ГЛАВА XV.

Законъ количества движенія

§ 149. Выводъ закона количества движенія.

Законы кинетики, извѣстные подъ именемъ законовъ количества движенія и живыхъ силъ, указываютъ зависимость между данными, относящимися съ одной стороны къ матерьяльной точкѣ, каковы: масса ея и состояніе (скорость), а съ другой къ дѣйствующимъ на эту точку силамъ; въ отношеніи ихъ можетъ быть указано: направленія силъ и величины ихъ въ зависимости отъ времени, промежутокъ времени, въ теченіе котораго силы дѣйствовали или разстояніе, на протяженіи котораго дѣйствовала сила.

Законъ количества движенія связываетъ между собою слѣдующія величины: массу точки — m, скорость точки въ начальное мгновеніе даннаго промежутка времени или начальную скорость v_0, конечную скорость v, а затѣмъ величину равнодѣйствующей приложенныхъ къ точкѣ силъ R и промежутокъ времени, въ теченіе котораго дѣйствовала сила.

Въ кинематикѣ нами было найдено слѣдующее уравненіе (§ 96)

$$v - v_0 = \text{пр} \sum_0^t k \, \Delta t \tag{115}$$

при чемъ касательное ускореніе k равно:

$$k = w \cos (w, k) = w \cos (w, v)$$

Такъ какъ

$$w = \frac{R}{m}$$

то

$$k = \frac{R}{m} \cos (w, v) = \frac{R}{m} \cos (R, v)$$

Вставляя эту величину въ уравненіе (115) найдемъ

$$v - v_0 = \text{пр} \sum_0^t \frac{R}{m} \cos (R, v) \, \Delta t$$

Такъ какъ m есть величина постоянная, то ее можемъ вынести за знаки суммы и предѣла тогда получимъ:

$$v - v_0 = \frac{1}{m}\ \text{пр.} \sum_0^t R \cos (R, v)\, \Delta t$$

откуда

$$mv - mv_0 = \text{пр.} \sum_0^t R \cos (R, v)\, \Delta t \tag{116}$$

Это уравненіе и называется уравненіемъ количества движенія.

Произведеніе массы точки на скорость ея носитъ названіе количества движенія; при этомъ mv — есть конечное, а mv_0 — начальное количество движенія, разность $(mv - mv_0)$ выражаетъ приращеніе количества движенія въ данный промежутокъ времени и называется пріобрѣтеннымъ количествомъ движенія.

Произведеніе $R \cos (R, v)\, \Delta t$ носитъ названіе элементарнаго импульса силы: такимъ образомъ импульсомъ силы называется произведеніе изъ проекціи силы на направленіе скорости на элементъ времени, въ теченіе котораго сила дѣйствовала.

Предѣлъ суммы элементарныхъ импульсовъ составитъ импульсъ силы, соотвѣтствующій данному промежутку времени. Такимъ образомъ законъ количества движенія говоритъ: пріобрѣтенное въ данный промежутокъ времени количество движенія равно импульсу равнодѣйствующей силы, вычисленному для того же промежутка времени.

§ 150. Частные случаи движенія.

1) $R = 0$; тогда имѣемъ $mv = mv_0$, т. е. количество движенія матеріальной точки остается постояннымъ, сохраняется, слѣдовательно когда силы, дѣйствующія на точку, находятся въ равновѣсіи или когда точка предоставлена самой себѣ, то количество движенія ея сохраняется.

Такой выводъ можно получить и непосредственно на основаніи начала инерціи; если $R = 0$, то состояніе точки не измѣняется, т. е. $v = v_0$, а слѣдовательно, $mv = mv_0$.

2) Движеніе прямолинейное, сила R постоянна по величинѣ. Направленіе ея должно совпадать очевидно съ направленіемъ движенія, т. е.

$$\cos (R, v) = 1$$

Въ выраженіи

$$\text{пр} \sum_0^t R\, \Delta t$$

можемъ вынести R за знаки суммы и предѣла

$$\text{пр} \sum_0^t R\, \Delta t = R\ \text{пр} \sum_0^t \Delta t = Rt$$

а потому законъ количества движенія выразится такъ

$$mv - mv_0 = Rt. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (117)$$

3) Если бы сила, совпадая по направленію съ прямолинейной траекторіей точки была бы непостоянна то имѣли бы

$$mv - mv_0 = \text{пр} \sum_0^t R\,\Delta t \qquad (118)$$

§ 151. Уравненіе проекціи количества движенія

Если

$$v - v_0 = \text{пр} \sum_0^t k\,\Delta t$$

то для оси Ox мы имѣли зависимость (§ 98)

$$v_x - v_{x_0} = \text{пр} \sum_0^t k_x\,\Delta t$$

Выбирая же вмѣсто x другую какую-либо ось l получимъ

$$v_l - v_{0l} = \text{пр} \sum_0^t k_l\,\Delta t$$

Но

$$k_l = w_l = w\cos(w, l) = \frac{R}{m}\cos(R, l)$$

а потому

$$v_l - v_{0l} = \text{пр} \sum_0^t \frac{R}{m}\cos(R, l)\,\Delta t$$

Или умножая обѣ части равенства на m

$$mv_l - mv_{0l} = \text{пр} \sum_0^t R\cos(R, l)\,\Delta t, \qquad (118a)$$

т. е. проекція пріобрѣтеннаго количества движенія точки на произвольное направленіе или, что то же, приращеніе количества движенія по любому направленію въ теченіе даннаго промежутка времени равно конечному импульсу силы по тому же направленію и для того же промежутка времени

При помощи высшей математики уравненіе количества движенія находится такъ: для проекціи равнодѣйствующей на ось x имѣли (§ 146, мелкій шрифтъ)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X \qquad (119)$$

или иначе

$$m\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt} = X$$

Отсюда

$$md\,\frac{dx}{dt} = X\,dt$$

или

$$dmv_x = X\,dt$$

Интегрированіемъ этого уравненія въ предѣлахъ отъ t_0 до t найдемъ

$$mv_x - mv_{x_0} = \int_{t_0}^{t} X\,dt$$

То же получимъ и для проекціи на другія оси.

Имѣя въ послѣднемъ уравненіи зависимость скорости v_x отъ времени (X — функція времени), мы имѣемъ такимъ образомъ первый интегралъ дифференціальнаго уравненія (119). Постоянная произвольная въ немъ v_{x_0}.

§ 152. Задачи.

1. Какая сила должна быть приложена къ тѣлу вѣсомъ 5 кгр., чтобы увеличить его скорость съ 2 м./сек. до 8 м./сек. въ теченіе 4 сек., если $g = \infty 10$ м./сек.²

2. Какой силой можетъ быть остановлено въ теченіе 10 сек. тѣло вѣсомъ 20 кгр., движущееся со скоростью 25 м./сек., если $g = \infty 10$ м./сек.²?

Рѣшенія задачъ

1. Отвѣтъ найдемъ, пользуясь или уравненіемъ количества движенія (§ 150): $Rt = mv - mv_0$, гдѣ $t = 4$, $m = 0{,}5$, $v = 10$, $v_0 = 2$, или отдѣльно уравненіями: $R = mk$ и $v = v_0 + kt$, которыя приводятся къ тому же уравненію количества движенія.

2. $R = 5$ кгр

ГЛАВА XVI

Работа и мощность

§ 153. Понятіе о работѣ силъ

Поднимая нѣкоторый грузъ послѣдовательно на различныя высоты, мы совершаемъ каждый разъ опредѣленную работу. Какъ ее измѣрить? Если мы предположимъ, что одинъ и тотъ же грузъ былъ поднятъ сначала на 1 футъ, затѣмъ на 4 фута, то послѣдній случай мы можемъ разсматривать состоящимъ изъ четырехъ послѣдовательныхъ перемѣщеній груза на высоту въ одинъ футъ каждое и потому можемъ сказать, что работа, здѣсь совершенная, будетъ въ четыре раза болѣе, нежели въ первомъ случаѣ; при подъемѣ того же груза на пять футъ работа будетъ въ пять разъ больше и т. д. Мы можемъ сказать, что работа будетъ пропорціональна высотѣ подъема или иначе — разстоянію, проходимому точкою приложенія силы, равной въ данномъ случаѣ вѣсу груза.

Если мы будемъ на одну и ту же высоту поднимать различной величины грузы, то легко видѣть, что работы, совершаемыя при каждомъ подъемѣ, будутъ пропорціональны величинамъ грузовъ или говоря болѣе обще, силамъ, совершающимъ работу.

Если наконецъ и грузы и перемѣщенія по вертикали будутъ различны, такъ напр. если одинъ разъ мы поднимемъ 2 пуда на 5 фут., а во второй разъ 6 пуд. на 3 фут., то сравнивая обѣ работы, величины которыхъ обозначимъ соотвѣтственно T_1 и T_2 съ нѣкоторой воображаемой работой T, состоящей въ поднятіи перваго груза 2 пуда на высоту 3 фут., на которую перемѣщенъ второй грузъ, на основаніи только что изложеннаго мы найдемъ что T будетъ относиться къ T_1 какъ 5 къ 3, а T къ T_2, какъ 2 къ 6, т. е.

$$\frac{T_1}{T} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{T}{T_2} = \frac{2}{6}$$

Перемножая почленно получимъ

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{5 . 2}{3 . 6},$$

т. е. работы относятся между собою, какъ произведенія груза на высоту подъема или, болѣе обще, какъ произведенія силы на разстояніе, пройденное точкою приложенія ея; при этомъ направленіе силы совпадаетъ съ направленіемъ движенія.

§ 154. Единица работы и ея измѣреніе

За единицу работы принимаютъ работу, совершенную при подъемѣ груза вѣсомъ въ одну единицу на высоту въ одну единицу. Такъ напр. въ метрической системѣ, гдѣ единицей силъ служитъ килограмъ, а единицей протяженія—метръ, мы найдемъ единицу работы называемую килограмъ-метромъ (кгр. м.).

Если основными единицами будутъ служить пудъ и футъ то единица работы получаетъ наименованіе пудофута.

Измѣреніе работы въ томъ случаѣ, когда за основныя единицы будутъ приняты: единица длины (L), времени (T) и массы (M), будетъ таково:

$$\text{измѣр силы} \times \text{измѣр разст} = \frac{M \cdot L}{T^2} \cdot L = ML^2T^{-2} \qquad (120)$$

Единицу работы въ абсолютной системѣ мѣръ мы получимъ въ томъ случаѣ, если величина силы будетъ равна одной динѣ и точка приложенія силы пройдетъ по направленію ея путь въ одинъ сантиметръ; такая работа называется эргомъ. О величинѣ этой единицы можемъ судить на основаніи слѣдующаго:

$$1 \text{ дина} = \frac{1}{981} \text{ вѣсового грама}$$

а потому

$$1 \text{ эргъ} = \frac{1}{981} \text{ гр см}$$

или

$$\frac{1}{981} \cdot \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{1000} \text{ кгр м}$$

§ 155 Работа постоянной силы, совпадающей съ направленіемъ движенія.

Легко видѣть, что при подъемѣ груза мы имѣемъ случай когда работа совершается постоянной силой при прямолинейномъ движеніи, совпадающемъ съ направленіемъ силы; поэтому мы можемъ сказать, что работа постоянной силы равна произведенію изъ величины силы на разстояніе пройденное точкою приложенія ея

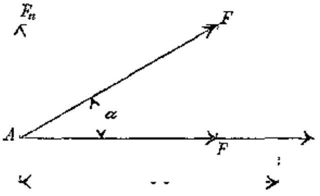
Если одинъ изъ элементовъ входящихъ въ выраженіе работы — сила или перемѣщеніе, обратится въ нуль, то и сама работа будетъ нулемъ

§ 156. Работа постоянной силы составляющей уголъ съ направленіемъ движенія точки.

При прямолинейномъ движеніи направленіе силы можетъ не совпадать съ направленіемъ движенія; дѣйствительно, если на точку находящуюся въ покоѣ, будутъ дѣйствовать нѣсколько постоянныхъ силъ, то точка получитъ ускореніе по направленію равнодѣйствующей всѣхъ силъ; силы же составляющія могутъ, вообще говоря, и не совпадать съ направленіемъ перемѣщенія точки. Въ этомъ случаѣ работа T, совершенная какой либо силой F на протяженіи s (фиг 133) выражается произведеніемъ:

$$T = F.s\cos(F, s) = Fs\cos\alpha \quad . \; . \qquad (121)$$

т е. работа постоянной силы при прямолинейномъ перемѣщеніи тѣла равна произведенію изъ величины силы на разстояніе, пройденное точкою къ которой сила приложена, и на косинусъ угла между направленіями силы и перемѣщенія; или, что то же, геометрическому произведенію изъ силы и перемѣщенія (§ 27), иначе — произведенію изъ пройденнаго разстоянія и проекціи силы на направленіе перемѣщенія такъ какъ



133

$$T = Fs\cos(F, s) = F\cos(F, s)\,.\,s = F_s\,.\,s \text{ *)}$$

Уголъ (F, s) между направленіями F и s берется по извѣстному правилу такъ, чтобы направленія обоихъ векторовъ или расходились отъ вершины или сходились къ ней.

Работа какой либо постоянной силы обращается въ нуль тогда когда будетъ равенъ нулю одинъ изъ трехъ множителей, входящихъ въ выраженіе работы (F s или $\cos(F, s)$)

Только что найденная формула (121) представляется наиболѣе общей для случая постоянной силы и прямолинейнаго перемѣщенія. Дѣйствительно, если уголъ (F, s) равенъ нулю, т е. сила совпадаетъ съ направленіемъ движенія, то $\cos(F\ s) = 1$ работа выразится произведеніемъ Fs.

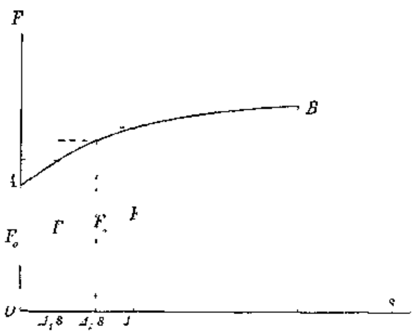
*) Какъ показываетъ это выраженіе, въ него входитъ проекція силы F на направленіе s; эта проекція будетъ одной изъ составляющихъ силы F, если мы разложимъ послѣднюю по направленіямъ s и перпендикулярному къ нему. Работа силы F равна работѣ составляющей ея F_s; работа же другой составляющей — F_n будетъ нулемъ, такъ какъ $\cos(F_n, s) = 0$; поэтому силу F_s можно назвать дѣйствующей, а F_n — недѣятельной составляющей силы F

Если $\angle (F, s) = 180^\circ$, $\cos 180^\circ = -1$, $T = -F \cdot s$, сила совершаетъ отрицательную работу т. е. точка перемѣщается по направленію обратному силѣ F.

Работѣ, опредѣляемой выраженіемъ (121) присваиваютъ названіе работы, израсходованной силой, приложенной къ точкѣ. Ту же работу, взятую со знакомъ минусъ, называютъ работой, пріобрѣтенной силой.

§ 157. Работа перемѣнной силы, совпадающей съ направленіемъ прямолинейнаго движенія точки.

Дано: $F = \varphi(s)$; графически зависимость эта представляется вообще говоря нѣкоторой кривой AB въ осяхъ OF и Os (фиг. 134).



134

Обратимъ здѣсь вниманіе на то, что за перемѣнную независимую теперь принимается уже не t, какъ это было до сихъ поръ, а s, и сила выражается въ зависимости отъ s. Это объясняется тѣмъ, что слѣдя за движеніемъ точки или тѣла, часто бываетъ удобнѣе получать величины усилій, дѣйствующихъ на тѣло или точку, въ зависимости отъ перемѣщенія тѣла, а не отъ времени. Примѣрами тому могутъ служить движеніе поршня парового цилиндра, когда особымъ приборомъ -индикаторомъ, зачерчиваются величины давленій, производимыхъ паромъ на 1 кв. ед. площади поршня въ зависимости отъ пути, пройденнаго послѣднимъ; при движеніи снаряда въ каналѣ орудія давленія пороховыхъ газовъ точно такъ же получаются въ зависимости отъ перемѣщенія снаряда.

Разъ мы желаемъ найти работу нѣкоторой перемѣнной по величинѣ силы на нѣкоторомъ протяженіи s, то примѣняя уже хорошо извѣстный намъ пріемъ раздѣлимъ длину Os на рядъ элементовъ (очень малыхъ перемѣщеній) $\Delta_1 s$, $\Delta_2 s$, $\Delta_3 s$, ... $\Delta_n s$, вообще говоря не равныхъ между собою. Возставимъ изъ точекъ дѣленія перпендикуляры до пересѣченія съ кривой AB. Положимъ для опредѣленности разсужденій, что сила F увеличивается съ движеніемъ точки что и представлено какъ разъ кривою AB.

Если мы допустимъ теперь, что сила въ продолженіи каждаго изъ элементарныхъ перемѣщеній Δs не измѣнялась по величинѣ, то работа, ею доставляемая, выразится по доказанному (§ 154) произведенiемъ силы на разстоянie; такъ для элемента Δs работа эта будетъ $F_0\Delta_1 s$, что графически представится площадью прямоугольника съ основанiемъ $\Delta_1 s$ и высотою F_0. Вмѣстѣ съ тѣмъ, очевидно, работа эта будетъ меньше работы $\Delta_1 T$, совершенной дѣйствительной силой на томъ же элементѣ $\Delta_1 s$, такъ какъ сила эта по предположенiю возрастаетъ. Если мы возьмемъ произведенie $\Delta_1 s$ на величину силы F_1, соотвѣтствующую концу этого элементарнаго перемѣщенiя, то произведенie это будетъ больше работы $\Delta_1 T$; имѣемъ, слѣдовательно:

$$F_0\Delta s < \Delta T < F_1\Delta s \tag{1}$$

Подобныя же соотношенiя найдемъ и для второго элемента Δs и для всѣхъ послѣдующихъ т. е.

$$F_1\Delta_2 s < \Delta_2 T < F_2\Delta_2 s \tag{2}$$

$$F_2\Delta_3 s < \Delta_3 T < F_3\Delta_3 s, \tag{3}$$

$$F_{n-2}\Delta_{n-1} s < \Delta_{n-1} T < F_{n-1}\Delta_{n-1} s \tag{n-1}$$

$$F_{n-1}\Delta_n s < \Delta_n T < F_n\Delta_n s \tag{n}$$

Складывая соотвѣтственныя части всѣхъ этихъ выраженiй найдемъ

$$F_0\Delta_1 s + F_1\Delta_2 s + F_2\Delta_3 s + \dots < \Delta_1 T + \Delta_2 T + \Delta_3 T \dots <$$

$$< F_1\Delta_1 s + F_2\Delta_2 s + F_3\Delta_3 s + \dots$$

или

$$\sum F_{i-1}\Delta_i s < T < \sum F_i\Delta_i s$$

гдѣ $T = \sum \Delta T$ — дѣйствительная работа перемѣнной силы.

Первая сумма въ геометрическомъ смыслѣ выражаетъ сумму площадокъ внутреннихъ прямоугольниковъ; послѣдняя внѣшнихъ. Мы уже знаемъ что разность между суммой тѣхъ и другихъ прямоугольниковъ можетъ быть сдѣлана произвольно малой, а потому заключающаяся между ними постоянная величина T будетъ предѣломъ той и другой суммы. Слѣдовательно:

$$T = \text{пр} \sum F_i\Delta_i s = \text{пр} \sum F\Delta s \tag{122}$$

т. е. работа, совершенная при прямолинейномъ перемѣщенiи точки перемѣнной по величинѣ силой, совпадающей по направленiю съ направленiемъ перемѣщенiя, выражается предѣломъ суммы произведенiй изъ элементовъ пути на значенія силы, отвѣчающія каждому элементу, при подведеніи всѣхъ элементовъ пути къ нулю.

Произведеніе — $F\Delta s$ называютъ элементарной работой силы а предѣлъ суммы элементарныхъ работъ—

$$\text{пр} \sum_{0}^{s} F\Delta s$$

конечной работой *).

Графически же обозначая площадь кривой черезъ S получимъ

$$T = S,$$

т. е. работа, совершенная при прямолинейномъ перемѣщеніи точки перемѣнной силой, направленіе которой совпадаетъ съ направленіемъ перемѣщенія, выражается площадью, ограниченной кривой, выражающей величину силы въ зависимости отъ разстоянія, осью разстояній и двумя ординатами, соотвѣтствующими началу и концу перемѣщенія.

§ 158. Работа перемѣнной по величинѣ и направленію силы, составляющей уголъ съ прямолинейнымъ движеніемъ точки.

Если сила будетъ перемѣнна не только по величинѣ, но и по направленію, то для опредѣленія работы ея необходимо знать величину проекціи ея на направленіе перемѣщенія, т. е.

$$F_s = F \cos (F, s) = \varphi (s),$$

которая можетъ быть дана непосредственно или могутъ быть указаны отдѣльно: величина силы въ функціи пройденнаго разстоянія и направленіе ея (также въ функціи разстоянія), что и дастъ возможность найти проекцію F_s.

Тогда, очевидно

$$T = \text{пр} \sum_{0}^{s} F\Delta s \cos (F, \Delta s) \tag{123}$$

Выраженіе это болѣе общее, нежели предыдущее, которое является частнымъ случаемъ, если $\cos (F, \Delta s) = 1$, т. е. $\angle (F, \Delta s) = 0^\circ$.

§ 159. Средняя величина силы или среднее усиліе.

Въ приложеніяхъ для упрощенія расчетовъ иногда представляется удобнымъ работу, доставленную данной перемѣнной силой, выразить въ видѣ работы нѣкоторой постоянной силы, совпадающей съ направленіемъ перемѣщенія, при томъ же перемѣщеніи точки; нужно опредѣлить въ такомъ случаѣ величину этой постоянной силы (средняго усилія).

*) Сущность изложеннаго вывода, какъ замѣтитъ читатель, вполнѣ одинакова съ выводами §§ 56 и 60; причина такого сходства также совершенно ясно (математическая сторона вопроса одна и та же).

Рѣшеніе этого вопроса графическимъ путемъ (фиг. 134) будетъ состоять въ построеніи прямоугольника, равновеликаго площади кривой AB, тогда ордината этого прямоугольника и дастъ намъ искомую величину средняго усилія $F_{ср}$, которая будетъ равна работѣ перемѣнной силы, дѣленной на перемѣщеніе точки. Дѣйствительно, по построенію имѣемъ

$$F_{ср} \cdot s = \text{пр} \sum_0^s F\Delta s \cos(F, \Delta s) = S$$

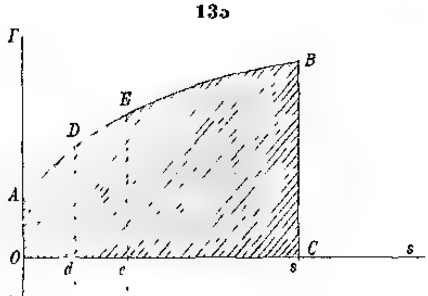
гдѣ S—площадь кривой, отсюда

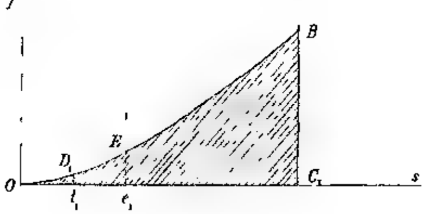
$$F_{ср} = \frac{\text{пр} \sum\limits_0^s F\Delta s \cdot \cos(F, \Delta s)}{s} = \frac{S}{s} \qquad (124)$$

§ 160. Построеніе кривой работъ

Для нагляднаго представленія о томъ, какъ измѣняется въ зависимости отъ перемѣщенія точки работа, доставляемая приложенной къ точкѣ силой, можно построить кривую, указывающую соотношеніе между пройденнымъ точкою разстояніемъ и работой разсматриваемой силы или, короче, кривую работъ.

135





136

Пусть кривая AB (фиг. 135) выражаетъ зависимость между силою и пройденнымъ точкою разстояніемъ.

При этомъ положимъ для простоты, что направленіе силы совпадаетъ съ направленіемъ перемѣщенія. Въ такомъ случаѣ, если послѣднее будетъ напр. s, то работа силы F будетъ равна площади фигуры $OABC$. Для каждой же части этого перемѣщенія Od, Oe,... работа будетъ выражаться соотвѣтственно площадками $OADd$, $OAEe$...

Остается, слѣдовательно, построить кривую, абсцисы которой были бы равны перемѣщеніямъ Od, Oe и т. д., а ординаты равнялись бы площадкамъ $OADd$, $OAEe$ и т д., т. е. работамъ, соотвѣтствующимъ указаннымъ перемѣщеніямъ. Подобныя кривыя намъ уже приходилось строить при опредѣленіи разстоянія по данной кривой скоростей и при опредѣленіи скорости по данной кривой ускореній.

Поэтому, не останавливаясь на самомъ процессѣ построенія, укажемъ только, что кривая OB_1 (фиг 136) и представляетъ собою искомую кривую работъ, такъ напр. ординаты ея

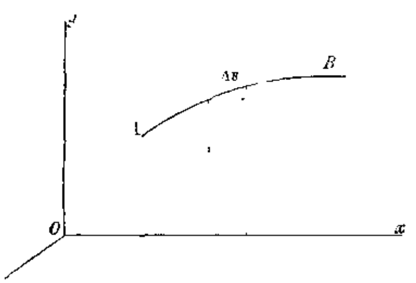
$$d_1D_1 = \text{площ. } OADd,$$
$$e_1E_1 = \text{площ. } OAEe,$$
$$e_1E_1 - d_1D_1 = \text{площ. } dDEe \text{ и т. д}$$

Ордината же C_1B_1 равна (по численному значенію) площади $OABC$

Кривую работъ мы провели черезъ точку O, предполагая, что мы опредѣляемъ работу силы, приложенной къ точкѣ, съ момента прохожденія послѣдней начала разстояній.

§ 161. Зависимость между работами силы равнодѣйствующей и силъ составляющихъ

Разложимъ равнодѣйствующую R всѣхъ силъ, приложенныхъ къ данной точкѣ, по тремъ взаимноперпендикулярнымъ осямъ Ox, Oy и Oz, составляющія по нимъ обозначимъ черезъ X, Y и Z



137

Разобьемъ, пройденное точкою, разстояніе $AB = s$ (фиг. 137) на рядъ элементарныхъ перемѣщеній Δs и найдемъ зависимость между работами равнодѣйствующей и составляющихъ на этомъ перемѣщеніи, причемъ ввиду малости элемента Δs можемъ считать его прямолинейнымъ и совпадающимъ съ направленіемъ касательной къ траекторіи

Такъ какъ

$$R = X + Y + Z,$$

то проектируя всѣ эти силы на направленіе Δs, имѣемъ

$$R \cos (R, \Delta s) = X \cos (X, \Delta s) + Y \cos (Y, \Delta s) + Z \cos (Z, \Delta s)$$

Умножая обѣ части этого равенства на Δs

$$R\Delta s \cos (R, \Delta s) = X\Delta s \cos (X, \Delta s) + Y\Delta s \cos (Y, \Delta s) + Z\Delta s \cos (Z, \Delta s)$$

мы находимъ, что элементарная работа равнодѣйствующей равна суммѣ элементарныхъ работъ составляющихъ для того же перемѣщенія.

Полагая

$$\Delta s \cos (X, \Delta s) = \Delta x$$
$$\Delta s \cos (Y, \Delta s) = \Delta y,$$
$$\Delta s \cos (Z, \Delta s) = \Delta z,$$

т. е. беря проекціи перемѣщеній на направленія силъ, получимъ:

$$R \Delta s \cos (R, \Delta s) = X \Delta x + Y \Delta y + Z \Delta z \,. \quad (125)$$

Составивъ подобныя выраженія для всѣхъ элементовъ разстоянія s, суммируя соотвѣтственныя части равенствъ и переходя къ предѣламъ, найдемъ:

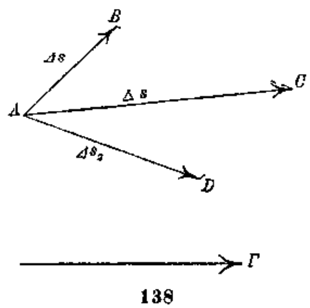
$$\text{пр} \sum_0^s R \Delta s \cos (R, \Delta s) = \text{пр} \sum_0^s (X \Delta x + Y \Delta y + Z \Delta z) =$$

$$= \text{пр} \left(\sum_{x_0}^{x} X \Delta x \right)_{\Delta x = 0} + \text{пр} \left(\sum_{y_0}^{y} Y \Delta y \right)_{\Delta y = 0} + \text{пр} \left(\sum_{z_0}^{z} Z \Delta z \right)_{\Delta z = 0} \quad (126)$$

т. е. **работа равнодѣйствующей силы для даннаго перемѣщенія равна суммѣ работъ силъ составляющихъ для проекцій того же перемѣщенія на направленіе каждой изъ силъ.**

§ 162. Работа силы при составномъ перемѣщеніи точки.

Пусть AB, AC и AD будутъ соотвѣтственно траекторіи составляющихъ (поступательныхъ) и составного движенія (фиг. 138). Найдемъ зависимость между элементарными работами силы F при составномъ и составляющихъ перемѣщеніяхъ *).



138

Возьмемъ элементарное перемѣщеніе Δs по траекторіи AC; составляющія перемѣщенія по траекторіямъ AB и AD будутъ — Δs_1 и Δs_2.

По заданному

$$\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2 \,,$$

проектируя эти перемѣщенія на направленіе силы F и умножая на величину послѣдней, имѣемъ:

$$F \Delta s \cos (F, \Delta s) = F \Delta s_1 \cos (F, \Delta s_1) + F \Delta s_2 \cos (F, \Delta s_2) \quad (127)$$

*) Сила F есть, вообще говоря, одна изъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ и задана функціей времени.

т. е. элементарная работа силы при составномъ перемѣщеніи равна суммѣ работъ той же силы при перемѣщеніяхъ составляющихъ.

Если составное перемѣщеніе Δs разложено на три составляющихъ по прямоугольнымъ осямъ координатъ—Δx, Δy, Δz, то, примѣняя къ этому случаю только что доказанную теорему будемъ имѣть для элементарной работы:

$$\Delta T = F\Delta s\, cos\,(F, \Delta s) = F\Delta x\, cos\,(F, \Delta x) + F\Delta y\, cos\,(F, \Delta y) + F\Delta z\, cos\,(F, \Delta z)$$

или замѣчая что

$$F\, cos\,(F, \Delta x) = X$$
$$F\, cos\,(F, \Delta y) = Y$$
$$F\, cos\,(F, \Delta z) = Z$$

получимъ

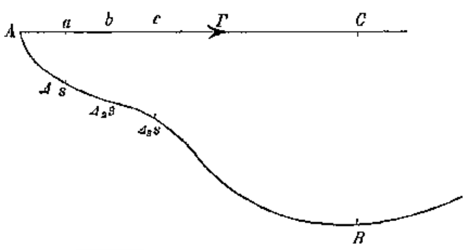
$$\Delta T = X\Delta x + Y\Delta y + Z\Delta z, \quad \ldots \quad (125a)$$

т. е. то же выраженіе, которое было найдено выше (125).

§ 163. Работа перемѣнной силы при произвольномъ перемѣщеніи точки.

Работа силы при этихъ условіяхъ наиболѣе просто вычисляется посредствомъ суммированія работъ составляющихъ по тремъ взаимно-перпендикулярнымъ траекторіямъ (осямъ координатъ). Для этого разумѣется должны быть даны послѣднія, а сама сила задана ея составляющими. Тогда для нахожденія искомой работы силы остается лишь примѣнить указанныя выше формулы (§ 161).

§ 164. Работа постоянной силы при криволинейномъ движеніи точки.



139

Пусть AB представляетъ траекторію точки (фиг. 139), на которую дѣйствуетъ постоянная сила F. Найдемъ работу ея при перемѣщеніи точки по AB.

Раздѣлимъ для этого перемѣщеніе AB на элементы $\Delta_1 s, \Delta_2 s \ldots \Delta_n s$ на столько малые, чтобы ихъ можно было принять за прямолинейные *).

*) При рѣшеніи практическихъ вопросовъ та или другая величина элементовъ Δs обусловливается той степенью точности, которой мы желаемъ при этомъ достигнуть.

Элементарная работа $\Delta_1 T$ силы F при прохожденіи точкою элемента пути $\Delta_1 s$ представится произведеніемъ

$$\Delta_1 T = F \,.\, \Delta_1 s \cos (F \, \Delta_1 s)$$

Но

$$\Delta_1 s \,.\, \cos (F \, \Delta_1 s) = Aa$$

слѣдовательно

$$\Delta_1 T = F \,.\, Aa.$$

Точно также

$$\Delta_2 T = F \,.\, ab$$

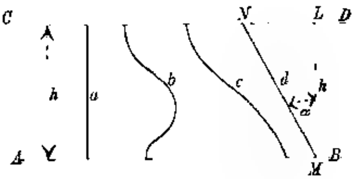
$$\Delta_3 T = F \,.\, bc$$

и т. д.

Складывая подобныя выраженія, составленныя для всѣхъ элементовъ Δs, найдемъ:

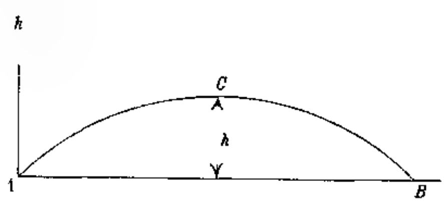
$$T = \sum \Delta T = F \,.\, Aa + F \,.\, ab + F \,.\, bc + \ldots =$$
$$= F \,(Aa + ab + bc + \ldots) = F \,.\, AC$$

т. е. работа постоянной силы при криволинейномъ перемѣщеніи точки равна произведенію силы на проекцію пути на направленіе силы.



140

Такимъ образомъ работа силы въ этомъ случаѣ не зависитъ отъ вида пути, описываемаго точкой, а только отъ проекціи его на направленіе силы. Къ числу силъ постоянныхъ относится сила тяжести (вѣсъ тѣла). Поэтому, если мы перемѣщаемъ грузъ съ одной горизонтальной плоскости CD на другую AB, то какимъ бы путемъ ни совершалось это перемѣщеніе (фиг. 140, a, b, c или d), работа вѣса будетъ всегда равна Ph; при обратномъ перемѣщеніи работа будетъ $-Ph$.



141

Если тяжелое тѣло P, описавъ нѣкоторый путь AB, возвратится на горизонтъ начальной точки траекторіи AB (фиг. 141), то работа силы тяжести будетъ нулемъ, такъ какъ при прохожденіи части траекторіи AC до наивысшей точки поднятія C работа силы тяжести будетъ равна

$$-Ph$$

при опусканіи же тѣла по CB сила тяжести совершитъ работу

$$Ph$$

Вся работа при передвиженіи точки изъ A въ B будетъ

$$Ph + Ph = 0$$

Положимъ, что мы перемѣстили грузъ P съ плоскости AB на плоскость CD (фиг. 140) по прямой MN, образующей съ вертикалью ML уголъ α. Работа вѣса по доказанному будетъ равна

$$T = Ph$$

но

$$h = MN \cos\alpha = a \cos\alpha$$

а потому

$$T = Ph = Pd \,.\, \cos\alpha = P\cos\alpha \,.\, d$$

Послѣдняя часть равенства показываетъ, что при перемѣщеніи груза по линіи d сила, необходимая для этого въ томъ случаѣ, если она будетъ совпадать по направленію съ направленіемъ перемѣщенія будетъ равна:

$$P \cos\alpha$$

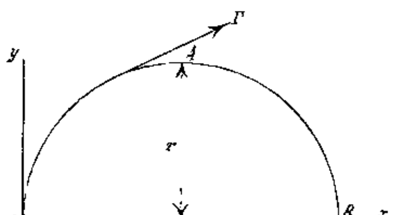
но

$$\frac{P\cos\alpha}{P} = \frac{d \,.\, \cos\alpha}{d} = \frac{h}{d}.$$

Слѣдовательно, при увеличеніи длины пути, проходимаго точкой сила, необходимая для перемѣщенія, уменьшается обратно пропорціонально длинѣ пути: мѣняя направленіе силы и длину пути, мы можемъ измѣнить величину силы (предполагая ее совпадающей съ направленіемъ перемѣщенія)

§ 165. Задачи

1. Дано: $F =$ [illegible] кгр. Найти работу, израсходованную силой на протяженіи 5 м.



142

2. Двѣ взаимноперпендикулярныя силы въ 20 и 50 кгр. перемѣщаютъ тѣло по направленію равнодѣйствующей ихъ на 12 м. Найти работу каждой изъ этихъ силъ.

3. Грузъ 15 пудовъ, падая съ высоты 6′, въ 20 ударовъ вбиваетъ сваю на глубину 2″. Найти среднюю величину сопротивленія грунта.

4. Вычислить работу силы F (фиг. 142), касательной къ траекторіи при перемѣщеніи точки по полукружности OAB.

5. Какъ измѣнится работа какой либо силы, если точка, къ которой сила приложена, увеличитъ свою скорость вдвое (движеніе равномѣрное):

а) на одномъ и томъ же протяженіи;

б) въ одно и то же время?

6. Рабочій подбрасываетъ землю лопатой на высоту 1,5 м. Сколько можетъ набросать онъ земли въ день, работая 9 час., если въ каждую сек. онъ можетъ доставить 2 кгр. м. работы? Уд. вѣсъ земли 1,8.

7. Повозка въ 20 пуд., прошла по наклону въ 8° путь въ 300 саж. Найти усиліе, которое развивала при этомъ лошадь и работу ея, если при тягѣ по горизонтальному пути усиліе равно 0,1 вѣса повозки.

8. Двѣ лошади везутъ нагруженную телѣгу съ постояннымъ усиліемъ 140 фунт. каждая при скорости 3 фут./сек. Найти работу ихъ въ теченіе 25 минутъ.

9. Сила, равная въ началѣ движенія 15 кгр., перемѣщаетъ тѣло на 24 метр., удваиваясь черезъ каждые 3 м. Найти величину постоянной силы, которая при томъ же пути въ 24 м. производитъ ту же работу, что и упомянутая перемѣнная сила?

10. Какъ велика работа силы тяжести при ходьбѣ человѣка по дорогѣ на протяженіи 8 верстъ, если длина его шага равна 2 футамъ, и при каждомъ шагѣ онъ поднимаетъ собственный вѣсъ равный 4 пуд. на высоту 1,5 дм.?

Рѣшенія задачъ.

1. $F = 35$ кгр. м.

2. 55 кгр. м. (сила въ 50 кгр.)

3. $15 \cdot 6 \cdot 20 : \frac{1}{6} = 10800$ пуд.

4. $T = F$. кг.

5. а) Работа не измѣнится.

б) Работа увеличится вдвое.

6. 24 куб. м.

7. Высота подъема $h = 300 \sin 8^\circ = 300 \cdot 0{,}139 = 41{,}7$ саж. Работа лошади:

1) для подъема повозки на высоту 41,7 саж.

$$T_1 = 41{,}7 \cdot 20 = 834 \text{ пуд. саж.}$$

2) для перемѣщенія по пути въ 300°

$$T_2 = 0{,}1 \cdot 300 \cdot 20 \cos 8^\circ = 600 \cdot 0{,}99 = 594 \text{ пуд. саж.}$$

Вся работа $T = T_1 + T_2 = 1428$ пуд. саж.

8. 30240 пуд. фут.

9. 690,625 кгр.

10. 7000 пуд. фут.

§ 166. Опредѣленіе зависимости между работой силы и временемъ.

При опредѣленіи работы какой либо силы на данномъ перемѣщеніи точки мы считали силу функціей разстоянія проходимаго точкой, т. е. имѣли

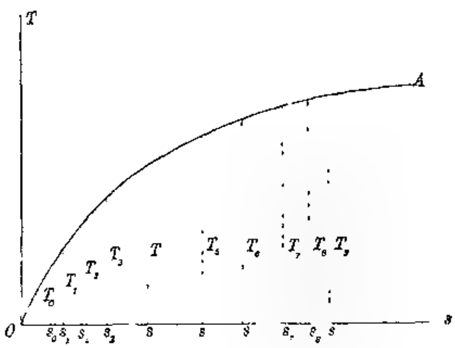
$$T = \varphi(s)$$

При этомъ и работа силы также являлась функціей разстоянія, какъ это видно изъ предыдущаго. Что же касается разстоянія, то оно обыкновенно разсматривалось въ качествѣ величины, зависящей отъ времени, т. е. функціи времени. Теперь можетъ представиться такой вопросъ: какъ по данной зависимости работы отъ разстоянія найти зависимость работы отъ времени?

Для этого, очевидно, необходимо знать, какъ будетъ зависѣть разстояніе отъ времени. Возьмемъ частный примѣръ: пусть будетъ дано

$$T = s^2 - 3s$$

$$s = 2 + t.$$



143

Если мы желаемъ найти зависимость T отъ t, то изъ написанныхъ двухъ уравненій слѣдуетъ исключить s. Вставляя значеніе s изъ второго въ первое уравненіе, найдемъ

$$T = (2 + t)^2 - 3(2 + t)$$

Дѣлая приведеніе, окончательно получимъ

$$T = t + t^2 - 2,$$

что и дастъ требуемую зависимость и можетъ быть безъ затрудненія представлено графически въ осяхъ t и T. Въ общемъ видѣ имѣемъ данными:

$$T = f(s)$$

$$s = \varphi(t)$$

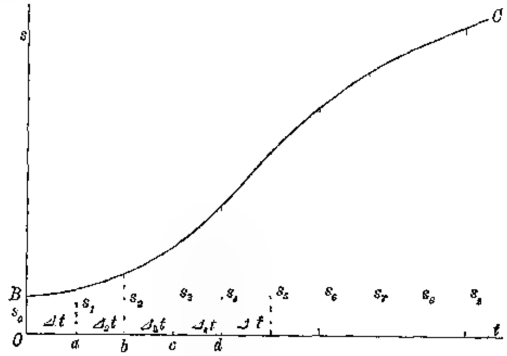
Подставляя въ первое уравненіе вмѣсто s величину его въ функціи отъ t изъ второго, будемъ имѣть:

$$T = f[\varphi(t)].$$

Обратимся теперь къ графическому рѣшенію того же вопроса.

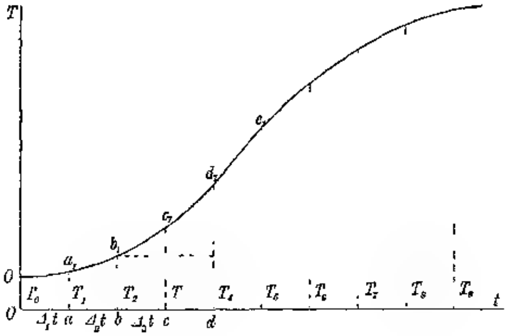
Пусть будутъ даны кривыя, выражающія зависимости: между T и s (фиг. 143) и между t и s (фиг. 144)

Отложимъ по оси t (фиг. 144) рядъ очень малыхъ промежутковъ времени $\Delta_1 t, \Delta_2 t, \Delta_3 t, \ldots$, возставимъ изъ концовъ ихъ ординаты до пересѣченія съ кривою BC; полученные отрѣзки ихъ $s_0, s_1, s_2, s_3 \ldots$ укажутъ значенія разстояній точки, соотвѣтствующихъ промежуткамъ времени Oa, Ob, Oc..



144.

Величины этихъ ординатъ отложимъ по оси s (фиг 143) въ соотвѣтствующемъ масштабѣ; для простоты положимъ масштабы для s одинаковыми въ обоихъ случаяхъ Изъ концовъ ихъ проведемъ орди



145.

наты до пересѣченія съ кривою OA отрѣзки

$$T_0 \quad T_1, \quad T_2, \quad T_3, \ldots$$

и дадутъ величины работъ, произведенныхъ силой, дѣйствующею на точку, соотвѣтственно промежуткамъ времени Oa, Ob, Oc, ..

Для того, чтобы представить зависимость между тѣми и другими на одномъ чертежѣ, возьмемъ прямоугольныя оси Ot и OT (фиг 145);

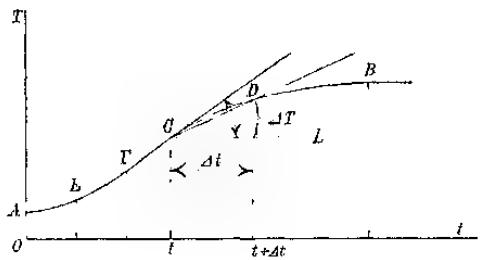
по первой изъ этихъ осей отложимъ промежутки времени Oa, Ob, Oc,..., и изъ точекъ a, b, c,... проведемъ ординаты, равныя соотвѣтственно T_0 T_1, T_2..

Полученныя точки o_1, a_1, b_1, c_1 .. соединимъ между собой кривою которая и дастъ искомую зависимость работы (T) отъ времени (t) По этой кривой мы можемъ найти количество работы, доставленное силою въ данный промежутокъ времени, напр. bd, которое изобразится разностью ординатъ соотвѣтствующихъ началу и концу его, т. е.

$$(dd - lb_1)$$

§ 167. Мощность.

Работа, доставляемая силою, будетъ, вообще говоря, измѣняться съ теченіемъ времени подобно тому какъ измѣняется напр. разстояніе точки также въ зависимости отъ времени



146.

Зависимость между разстояніемъ и временемъ, какъ извѣстно изъ механики, доставляетъ возможность судить о скорости движенія, о той быстротѣ, съ какою измѣняются проходимыя точкою разстоянія съ теченіемъ времени а именно, имѣемъ

$$v = \text{пр}\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$$

Точно также вполнѣ естественнымъ является вопросъ: какъ судить о томъ, съ какою быстротой измѣняется работа доставляемая данною силой, въ зависимости отъ времени?

Для этого, очевидно, нужно взять отношеніе работы, совершенной въ данный промежутокъ времени, къ этому промежутку; такъ, если зависимость работы отъ времени будетъ выражена кривою AB (фиг. 146), то обозначая работу, доставленною силою въ промежутокъ времени t, чрезъ T_t, а работу въ промежутокъ времени $(t + \Delta t)$ чрезъ $T_{t+\Delta t}$, найдемъ, что работа, доставленная въ промежутокъ времени Δt будетъ равна $\Delta t = T_{t+\Delta t} - T_t$

Дѣля эту величину на Δt найдемъ среднюю быстроту измѣненія или приращенія работы за данный промежутокъ времени или среднюю мощность данной силы

$$N_p = \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

Изъ чертежа видно, что средняя мощность по величинѣ равна численному тангенсу угла, образуемому сѣкущею CD съ осью временъ, тангенсъ этотъ будетъ измѣняться вмѣстѣ съ измѣненіемъ промежутка времени. Если мы желаемъ найти мощность въ данное мгновеніе, то слѣдуетъ взять предѣлъ средней мощности, уменьшая до нуля промежутокъ времени, причемъ сѣкущая CD обратится въ касательную въ точкѣ C.

Обозначая мощность въ данное мгновеніе буквою N, получимъ

$$N = \text{пр}\left(\frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}\right)_{\Delta t=0} = \text{пр}\left(\frac{\Delta T}{\Delta t}\right)_{\Delta t=0} \qquad (127)$$

Такимъ образомъ мощностью въ данное мгновеніе называется предѣлъ отношенія доставленной силою работы въ промежуткѣ времени, имѣющій въ этомъ мгновеніи свое начало или свой конецъ, къ этому промежутку времени.

Графически мощность въ данное мгновеніе (фиг. 146) опредѣляется численнымъ тангенсомъ угла, образуемаго касательною въ данной точкѣ кривой работъ съ осью временъ.

Не трудно показать, что мощность въ данное мгновеніе выражается произведеніемъ изъ силы на скорость. Дѣйствительно, изъ закона живыхъ силъ имѣемъ

$$T = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

гдѣ v_0 — начальная, а v — конечная скорость тѣла.

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{m}{2}\,\frac{(v+\Delta v)^2 - v^2}{\Delta t} = \frac{m}{2}\,\frac{2v\Delta v + (\Delta v)^2}{\Delta t} = mv\frac{\Delta v}{\Delta t} + \frac{m}{2}\,\frac{\Delta v}{\Delta t}\,\Delta v$$

$$N = \text{пр.}\,\frac{\Delta T}{\Delta t} = \text{пр}\left[mv\,\frac{\Delta v}{\Delta t}\right] + \text{пр.}\left[\frac{m}{2}\,\frac{\Delta v}{\Delta t}\,\Delta v\right],$$

предѣлъ второго слагаемаго равенъ нулю, такъ какъ пр. $(\Delta v) = 0$, а потому

$$N = \text{пр}\left[mv\,\frac{\Delta v}{\Delta t}\right] = mv\;\text{пр.}\,\frac{\Delta v}{\Delta t} = mvw$$

гдѣ w — ускореніе, но

$$mw = F$$

слѣдовательно

$$N = Fv, \qquad (127a)$$

т. е. мощность въ данное мгновеніе измѣряется произведеніемъ изъ силы на скорость.

§ 168. Единица мощности.

Если принять за основныя единицы

единицу длины (символъ ея L)
» времени (» » T)
массы (» » M)

то измѣренія механическихъ величинъ будутъ слѣдующія

разстоянія s	L
скорости v	$\frac{L}{T} = LT^{-1}$
ускоренія w	$\frac{L}{T} : T = LT^{-2}$
силы F	MLT^{-2}
работы T	ML^2T^{-2}
мощности N	ML^2T^{-3}

Въ техникѣ за единицу мощности, какъ извѣстно, принимаютъ паровую лошадь, равную 75 кгр. м. въ сек. Слѣдовательно такою мощностью будетъ обладать сила, равная напр. 5 кгр., при дѣйствіи на точку, скорость которой въ данное мгновеніе будетъ 15 м./сек., или сила въ 25 кгр., приложенная къ точкѣ, движущейся со скоростью 3 м. сек. и т. д.

Болѣе удобною при вычисленіяхъ могла бы оказаться единица мощности, называемая понселе, равная 100 кгр м. въ сек

Что же касается абсолютной системы мѣръ то въ ней единицею мощности будетъ эргъ въ секунду

§ 169 Опредѣленіе мощности въ частныхъ случаяхъ.

Мы далѣе будемъ предполагать, что сила совпадаетъ съ направленіемъ перемѣщенія, которое для простоты будемъ считать прямолинейнымъ

1) Сила F постоянна.

Въ такомъ случаѣ въ выраженіи

$$N = Fv$$

множитель F есть число постоянное; поэтому измѣненія мощности пропорціональны измѣненіямъ скорости данной точки.

Напомнимъ, что мы разсматриваемъ работу и мощность одной изъ силъ приложенныхъ къ тѣлу; поэтому точка въ присутствіи силы можетъ двигаться равномѣрно, и мы теперь же можемъ добавить, что такой случай только и возможенъ при условіи, что всѣ прочія силы къ точкѣ приложенныя, за исключеніемъ разсматриваемой силы даютъ равнодѣйствующую равную ей и противоположно направленную

2) Сила F и скорость v постоянны.

$$N = F \cdot v = Const$$

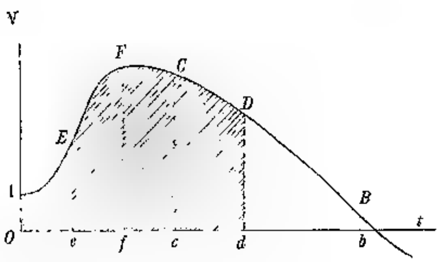
Здѣсь мощность найдемъ, умноживъ частное отъ дѣленія разстоянія, пройденнаго точкою въ любой промежутокъ времени на силу къ точкѣ приложенную.

3) Скорость движенія тѣла постоянна.

Мощность пропорціональна величинѣ силы.

§ 170. Построеніе кривой мощностей.

Такъ какъ мощность въ данное мгновеніе выражается численнымъ тангенсомъ, образуемымъ касательною въ соотвѣтствующей точкѣ кривой работъ (фиг. 146) съ осью временъ, то этимъ самымъ дается правило для построенія кривой мощностей (вполнѣ аналогичное съ нахожденіемъ кривой скоростей по данной кривой разстояній).



147

Проводя рядъ касательныхъ къ кривой AB въ различныхъ точкахъ ея A, E, F, C, D, B и опредѣляя тангенсы угловъ ихъ съ осью временъ, мы опредѣлимъ соотвѣтствующія значенія мощностей въ этихъ точкахъ. Отложивъ эти величины въ опредѣленномъ масштабѣ на перпендикулярахъ, возставленныхъ къ оси временъ въ соотвѣтствующихъ точкахъ O, e, f, c, d, b (фиг. 147) и соединивъ полученныя точки A, E, F, C, D, B между собою, мы и найдемъ искомую кривую мощностей, по которой можно судить о быстротѣ измѣненія работы данной силы съ теченіемъ времени.

Имѣя подобную кривую, не трудно видѣть, что работа, доставленная данной силой въ теченіе напр. промежутка времени Od, выразится площадью $OADd$, т. е. площадью, ограниченной кривою мощностей, осью временъ и двумя ординатами, соотвѣтствующими началу и концу даннаго промежутка времени.

Аналитически же зависимость работы отъ мощности выразится такъ:

$$T = T_0 + \text{пр} \sum^{t} N \cdot \Delta t$$

гдѣ во взятомъ частномъ случаѣ t, стоящее надъ знакомъ сигма, равно Od, а T_0 представляетъ собою начальную работу, т. е. ту работу, которая была совершена данной силой до начала временъ.

§ 171. Задачи

1. Насосъ поднимаетъ въ сек. 36 литр. воды на высоту въ 25 м.

а) Найти число лош. силъ, необходимыхъ для дѣйствія его, пренебрегая вредными сопротивленіями въ немъ

б) Выразить эту мощность въ понселе.

в) Найти мощность, если коэфиціентъ полезнаго дѣйствія насоса равенъ 0,6.

2. Найти мощность, развиваемую рабочимъ, вращающимъ рукоять ворота, плечо которой a, съ числомъ оборотовъ n въ мин. и оказывающимъ на нее давленіе P кгр

Числ. данныя: $a = 40$ см., $n = 18$, $P = 7$ кгр.

3. Какъ велика мощность машины *), поднимающей молотъ, вѣсомъ 200 кгр на высоту 0,75 м., если молотъ дѣлаетъ 120 ударовъ въ минуту.

4. Найти число лош. силъ, которое должна развивать машина паровоза, если вѣсъ поѣзда 300 тоннъ, скорость 21,6 км. въ часъ, коэфиціентъ сопротивленія движенію 0,005.

5. Для сообщенія тѣлу, имѣющему скорость 20 м./сек., въ 15 секундъ утроенной скорости нужно увеличить мощность двигателя на 2 лош. силы. Какъ великъ вѣсъ тѣла?

6. Черезъ поперечное сѣченіе канала въ секунду при средней скорости 0,7 м./сек. протекаетъ 12,5 куб. метр. воды. Какъ велика мощность, развиваемая этимъ количествомъ воды?

Рѣшенія задачъ.

1. Работа, доставляемая насосомъ въ сек., равна 36 . 25 = 900 кгр. м. (1 литръ вѣситъ 1 кгр.). Мощность же насоса составляетъ 900 кгр. м/сек

а) Мощность 900 : 75 = 12 лош. силъ.

б) Понселе = 100 кгр. м. сек. Мощность насоса 9 понселе.

в) Мощность, необходимая для вращенія насоса при существованіи вредныхъ сопротивленій, равна 12 : 0,6 = 20 лош. сил.

2. Мощность

$$N = Pv = P\frac{\pi a n}{30} = 0{,}1047\, anP \text{ кгр. м./сек}$$

или въ лош. силахъ

$$N = 0{,}0014\, anP.$$

Числ. данныя

$$N = 5{,}28 \text{ кгр. м./сек.} = 0{,}07 \text{ лош. сил.}$$

4. Сила тяги

$$300\,000 \cdot 0{,}005 = 1500 \text{ кгр}$$

---

*) Часто говорятъ: «сила» машины вмѣсто «мощность» машины, но очевидно это неправильно.

Мощность въ лош силахъ

$$N = 1500 \cdot \frac{21,6 \cdot 1000}{60^2} \cdot \frac{1}{75} = 120$$

5 Ускореніе тѣла

$$k = \frac{v - v_0}{t} = \frac{8}{3} \text{ м. сек}^2$$

Сила R, сообщающая это ускореніе, опредѣлится изъ равенства $T = Rs$, гдѣ работа силы T равна

$$2 \text{ лош сил} \times 75 \text{ кгр м/сек} \times 15 \text{ сек.} = 2250 \text{ кгр м}$$

Разстояніе

$$s = v_0 t + \frac{kt^2}{2} = 600 \text{ м}$$

Находимъ

$$R = 3{,}75 \text{ кгр}$$

Масса тѣла $m = \frac{3{,}75 \cdot 3}{8}$ вѣсъ $P = \frac{3{,}75 \cdot 3 \cdot 9{,}8}{8} = 13{,}78$ кгр

6 Искомая мощность

$$\frac{mv^2}{2} \cdot \frac{1}{75} = 4{,}16 \text{ лош сил}.$$

ГЛАВА XVII

Законъ живыхъ силъ

§ 172. Выводъ закона живыхъ силъ въ случаѣ постоянной силы

Пусть точка будетъ подвержена дѣйствію постоянной силы, направленіе которой совпадаетъ съ направленіемъ начальной скорости точки; послѣдняя будетъ двигаться прямолинейно и равноперемѣнно. Движеніе ея будетъ при этомъ опредѣляться слѣдующими уравненіями (§ 79):

$$v = v_0 + kt$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{kt^2}{2}$$

Или, полагая начало временъ совпадающимъ съ началомъ разстояній, т. е. $s_0 = 0$, получимъ

$$v = v_0 + kt,$$

$$s = v_0 t + \frac{kt^2}{2}$$

Исключимъ изъ этихъ уравненій время t. Изъ перваго уравненія находимъ

$$t = \frac{v - v_0}{k}$$

Подставляя эту величину во второе

$$s = v_0 \frac{v - v_0}{k} + \frac{k}{2} \frac{(v - v_0)^2}{k^2}$$

умножая обѣ части послѣдняго выраженія на k и дѣлая приведеніе, получимъ

$$ks = \frac{v^2 - v_0^2}{2}$$

Такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ $k = w$, то

$$k = \frac{R}{m},$$

гдѣ подъ R разумѣется равнодѣйствующая всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ.

Имѣемъ

$$\frac{R}{m}\,s = \frac{v^2 - v_0^2}{2}$$

или умножая обѣ части равенства на m:

$$Rs = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \qquad (128)$$

Произведеніе

$$\frac{mv^2}{2}$$

называется живою силою точки. Соотвѣтствуя концу пройденнаго пути, она представляетъ конечную живую силу; произведеніе же

$$\frac{mv_0^2}{2}$$

изображаетъ начальную живую силу, разность

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

выражаетъ приращеніе живой силы или пріобрѣтенную живую силу. Первая часть уравненія (128) представляетъ работу силы R. Такимъ образомъ мы имѣемъ: работа, произведенная силой, приложенной къ точкѣ, или работа, произведенная равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ точкѣ, при данномъ перемѣщеніи точки равна приращенію живой силы точки при томъ же перемѣщеніи.

Не слѣдуетъ говорить: работа точки или тѣла, такъ какъ работа производится силами, точка же соотвѣтственно этой работѣ только измѣняетъ свою скорость и свою живую силу; послѣдняя же не смотря на названіе ничего общаго съ силой не имѣетъ.

Выраженіе

$$\frac{mv^2}{2}$$

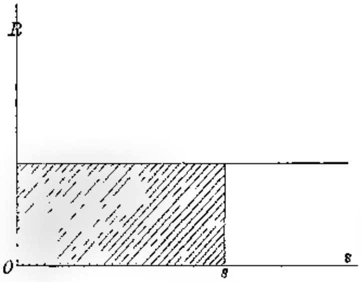
всегда положительно. Если силы, приложенныя къ точкѣ, совершаютъ положительную работу, то живая сила, а слѣдовательно, скорость точки, увеличивается и обратно. При ускоренномъ движеніи силы, совершаютъ положительную работу; при движеніи замедленномъ работа силъ отрицательна.

Если $\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}$, то для даннаго перемѣщенія работа силъ равна нулю.

Для нахожденія приращенія живой силы или, что то же, работы, совершенной равнодѣйствующей всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ, достаточно кромѣ массы точки имѣть только начальную и конечную скорость точки и нѣтъ необходимости знать прочія обстоятельства движенія, какъ то. значенія промежуточныхъ скоростей видъ траектоpiи и т. п.

Живая сила должна, очевидно, измѣряться тѣми же единицами что и работа, измѣреніе которой таково:

$$L^2MT^{-2}$$



148

Повѣримъ это

$$\text{измѣр.}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = M\left(\frac{L}{T}\right)^2 =$$
$$= L^2MT^{-2},$$

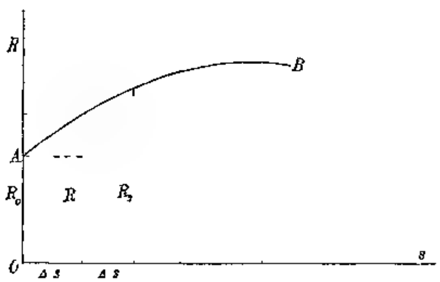
т. е. то же, что и работы.

Если зависимость силы отъ разстоянія, проходимаго точкой будетъ дана графически—въ разсматриваемомъ случаѣ постоянной силы прямой, паралельной оси разстояній (фиг. 148)—, то работа этой силы на протяженіи s выразится площадью заштрихованнаго прямоугольника, слѣдовательно этой же площадью выразится и приращеніе живой силы.

§ 173. Законъ живыхъ силъ при произвольномъ движеніи точки

Имѣемъ данными: массу точки m и $R = f(s)$.

Допустимъ для простоты, что равнодѣйствующая сила совпадаетъ съ направленіемъ движенія, что будетъ при прямолинейномъ движеніи. Въ движеніи криволинейномъ необходимо знать величину проекціи силы на направленіе движенія, т. е. величину касательной силы $K = R\cos(R,v)$. Ходъ разсужденій остается впрочемъ въ обоихъ случаяхъ одинаковымъ.



149

Графически зависимость между силой и разстояніемъ проходимымъ движущейся точкой, представится нѣкоторой кривой AB (фиг. 149). Раздѣлимъ данное перемѣщеніе s на n элементовъ: $\Delta_1 s$, $\Delta_2 s$, $\Delta_3 s$ и т. д. и возставимъ изъ точекъ дѣленія перпендикуляры до пересѣченія съ кривой. Предположимъ далѣе, что движеніе на протяженіи каждаго изъ этихъ элементовъ было равноперемѣннымъ т е сила дѣйствующая на точку была постоянной по величинѣ. Тогда приращеніе живой силы выразится для элемента $\Delta_1 s$ площадкою прямоугольника — $R_0\Delta_1 s$. Но какъ представляетъ кривая, сила въ дѣйствительномъ движеніи не была постоянной, а постепенно хотя и неравномѣрно, возрастала, поэтому дѣйствительная скорость v_1 въ концѣ $\Delta_1 s$ будетъ болѣе, нежели скорость при постоянномъ ускореніи, а потому работа силы R_0 будетъ меньше дѣйствительнаго приращенія живой силы точки, т е

$$R_0\Delta_1 s < \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2},$$

гдѣ v_0 — скорость въ началѣ элемента $\Delta_1 s$.

Если бы мы предположили силу постоянной и равной конечной величинѣ ея R_1 при разсматриваемомъ перемѣщеніи, то скорость, а слѣдовательно и живая сила, которой точка обладала бы въ концѣ этого перемѣщенія, была бы болѣе дѣйствительной; а слѣдовательно и работа силы такой силы, равная $R_1\Delta_1 s$ была бы больше дѣйствительнаго приращенія живой силы, т. е.

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} < R_1\Delta_1 s$$

Сводя обѣ послѣднія неравенства вмѣстѣ, получимъ

$$R_0\Delta_1 s < \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} < R_1\Delta_1 s \tag{1}$$

На основаніи подобныхъ же разсужденій по отношенію къ слѣдующимъ элементарнымъ перемѣщеніямъ можемъ написать

$$R_1\Delta_2 s < \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} < R_2\Delta_2 s \tag{2}$$

$$R_2\Delta_3 s < \frac{mv_3^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} < R_3\Delta_3 s \tag{3}$$

.

$$R_{n-2}\Delta_{n-1} s < \frac{mv_{n-1}^2}{2} - \frac{mv_{n-2}^2}{2} < R_{n-1}\Delta_{n-1} s \tag{n—1}$$

$$R_{n-1}\Delta_n s < \frac{mv_n^2}{2} - \frac{mv_{n-1}^2}{2} < R_n\Delta_n s \tag{n}$$

Сложивъ соотвѣтственныя части этихъ выраженій и произведя сокращенія въ средней части, найдемъ

$$\sum R_{n-1}\Delta s < \frac{mv_n^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} < \sum_1^n R\,\Delta s,$$

или

$$\sum_0^s R_{i-1}\,\Delta s < \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} < \sum_0^s R\,\Delta_i s.$$

Отсюда заключаемъ, что

$$\text{пр} \sum_0 R_i \Delta_i s = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \qquad (128а)$$

Здѣсь первая часть равенства выражаетъ конечную работу равнодѣйствующей (при прямолинейномъ движеніи), а вторая приращеніе живой силы. Въ произвольномъ (криволинейномъ) движеніи въ первой части подъ R слѣдуетъ разумѣть, какъ было замѣчено выше, касательную силу или ввести подъ знакъ суммы множитель $\cos(R, v)$. Итакъ, приходимъ къ тому же выводу, что и въ случаѣ постоянной силы, т. е. работа равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ точкѣ, равна приращенію (алгебраическому) живой силы точки при одномъ и томъ же перемѣщеніи (или въ одинъ и тотъ же промежутокъ времени).

Въ томъ случаѣ, когда сила не совпадаетъ съ направленіемъ движенія, законъ живыхъ силъ выразится въ слѣдующей формѣ:

$$\text{пр.} \sum_0^s R\,\Delta s \cos(R, \Delta s) = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \qquad (128б)$$

Уравненіе (128а) можетъ быть представлено такъ (см. уравненіе 125):

$$\text{пр} \sum (X\Delta x + Y\Delta y + Z\Delta z) = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Слѣдуетъ имѣть въ виду, что живая сила, не смотря на свое названіе, ничего не имѣетъ общаго съ силой, понимаемой въ механическомъ смыслѣ, какъ причиной, сообщающей ускореніе. Терминъ этотъ, введенный въ науку нѣсколько вѣковъ тому назадъ, остался въ ней до сихъ поръ. Къ вопросу о живой силѣ мы вернемся еще разъ далѣе, въ главѣ объ энергіи. Въ настоящее же время замѣтимъ, что живой силѣ можетъ быть придано другое, болѣе отвѣчающее сущности дѣла наименованіе—энергіи движенія. Въ самомъ дѣлѣ, работа, израсходованная какой либо силой, приложенной къ матерьяльной точкѣ, не можетъ исчезнуть, она непремѣнно выразится соотвѣтственнымъ, равнымъ ей измѣненіемъ живой силы точки. Если мы способность тѣла произвести работу назовемъ энергіей, причемъ количество произведенной работы, служащее мѣрою израсходованной энергіи, выразится измѣненіемъ живой силы точки, то мы должны заключить, что живая сила можетъ быть также принята за особый видъ энергіи; а такъ какъ для данной точки количество живой силы есть функція скорости ея, то энергіи этой можетъ быть придано вполнѣ соотвѣтствующее наименованіе энергіи движенія или кинетической энергіи. Въ такомъ случаѣ законъ живыхъ силъ получаетъ слѣдующее выраженіе: **работа равнодѣйствующей силъ приложенныхъ къ точкѣ равна приращенію кинетической энергіи точки.**

При этомъ имѣется въ виду работа, израсходованная силой (§ 156), разсматривая же работу пріобрѣтенную, равную численно работѣ израсходованной, но имѣющую обратный знакъ, то можемъ законъ живыхъ силъ формулировать такъ: **сумма пріобрѣтенной силою работы и пріобрѣтенной точкою живой силы равна нулю.**

При помощи высшей математики уравненіе живыхъ силъ находится такъ Умножимъ уравненія:

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2},$$

$$Y = m\frac{d^2y}{dt^2},$$

$$Z = m\frac{d^2z}{dt^2}$$

соотвѣтственно на dx, dy и dz и соотвѣтственныя части ихъ сложимъ. Будемъ имѣть

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz\right)$$

Преобразуя выраженіе въ скобкахъ, послѣдовательно получимъ

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\,d\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\,d\,[v_x^2 + v_y^2 + v_z^2] = \frac{1}{2}\,dv^2$$

Слѣдовательно

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \frac{m}{2}\,dv^2 = d\,\frac{mv^2}{2}$$

Интегрируя послѣднее уравненіе, найдемъ окончательно

$$\int_{t_0}^{t}(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

§ 174. Задачи

1. Найти живую силу снаряда вѣсомъ въ 60 кгр при скорости 300 м./сек., принимая $g = 10$ м./сек^2

2. Найти живую силу тѣла, вѣсомъ P кгр., упавшаго съ высоты h м

3. а) Найти работу, израсходованную силой при данныхъ задачи 2, § 152.

б) На какомъ протяженіи произойдетъ остановка?

4. а) Какъ велика работа пороховыхъ газовъ, сообщающихъ девятифунтовому ядру скорость 1880 фут./сек?

б) Какъ велико среднее давленіе газовъ, если ядро проходитъ внутри орудія путь 9,4 фут.?

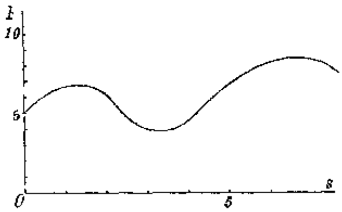
в) Какъ велико сопротивленіе, способное остановить ядро, дѣйствующее на него на протяженіи 1 фут?

5. Тѣло, вѣсомъ 50 кгр., должно быть поднято на высоту 12 метр., при чемъ въ концѣ подъема оно должно обладать скоростью 7 м. сек. Какъ велика работа, которую необходимо затратить на это поднятіе?

6. На тѣло, вѣсомъ 10 кгр., движущееся со скоростью 4 м./сек. дѣйствуетъ, при прямолинейномъ перемѣщеніи его въ 6 м сила I заданная графически (фиг. 150).

а) Найти скорость тѣла въ концѣ этого разстоянія полагая $g = \infty 10$ м. сек.²

б) Найти постоянную силу которая сообщитъ тѣлу ту же скорость



150

7. Окружная скорость колеса 9 м. Колесо приводится въ 3 сек въ состояніе покоя, для чего употребляется сопротивленіе отъ тренія въ 25 кгр., приложенное къ окружности колеса. Какая работа будетъ при этомъ израсходована?

8. На окружность тормазного колеса дѣйствуетъ сопротивленіе въ 12 кгр., уменьшающее въ теченіе 5 минутъ число оборотовъ въ минуту съ 25 до 10. Если діаметръ колеса равняется 1,75 метра, то какъ велика израсходованная при этомъ работа?

9. Какова живая сила колеса въ началѣ и въ концѣ соотвѣтствующаго промежутка времени при данныхъ предыдущей задачи?

10. Найти живую силу обода маховика, внѣшній діаметръ котораго — D см., внутренній — d см., ширина обода — b см., число оборотовъ въ мин — n. Уд вѣсъ чугуна — γ.

Числ. данныя: $D = 520$ см., $d = 480$ см., $b = 28$ см., $n = 75,3$, $\gamma = 7,3$.

11 Тѣло въ 700 кгр. достигаетъ подъ вліяніемъ постоянной силы скорости въ 15 м въ теченіе 10 сек

а) Какъ велика эта сила?

б) Чему равна ея работа?

12. Какую механическую работу доставляетъ маховикъ радіусомъ въ 2 м., вѣсомъ 6000 кгр при переходѣ съ числа оборотовъ $n = 10$ къ числу $n_1 = 4$?

Рѣшенія задачъ:

1 270000 кгр. м.

2 Ph

3. а) 625 кгр. м.; б) 125 м.

4. а) 493938 фунт. фут., б) 5146,7 пуд. в) 12348,4 пуд.

5. $T = Ph + \frac{mv^2}{2} = 724,9$ кгр. м.

6. а) Пользуемся уравненіемъ живыхъ силъ

$$T = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2},$$

гдѣ работа T опредѣляется графически изъ фиг. 150 (§ 15), $m = 1$, $v_0 = 4$ м./сек.

б) Искомая сила равна $\frac{T \text{ кгр. м.}}{6 \text{ м.}}$

7. 337,5 кгр. м.

8. 5772 кгр. м.

9. 6872,2 и 1095,5 кгр. м.

10. Объемъ обода (цилиндр. кольцо)

$$V = \frac{1}{4} \pi b (D^2 - d^2) \text{ см}^3$$

Вѣсъ его

$$V\gamma$$

Масса

$$m = \frac{\pi b \gamma}{4g} (D^2 - d^2)$$

Скорость средней окружности обода

$$v = \frac{\pi n}{60} \cdot \frac{D + d}{2} \text{ см./сек.}$$

Живая сила обода

$$T = \frac{m}{2} v^2 = \frac{\pi b \gamma}{8g} \cdot \frac{\pi^2 n^2}{120^2} (D^2 - d^2)(D + d)^2 \text{ гр./см} =$$

$$= \frac{1}{10^5} \cdot \frac{\pi^3 \gamma}{8g \cdot 120^2} \cdot n^2 (D + d)^3 (D - d) \text{ кгр. м.}$$

Числ. данныя. $T = 73633$ кгр. м.

11. а) 107 кгр.; б) 8097,5 кгр. м.

12. 1132,83 кгр. м.

ГЛАВА XVIII

Движеніе несвободной точки

§ 175. Понятіе о несвободной точкѣ.

Подъ свободной точкой разумѣютъ такую точку, движеніе которой ни чѣмъ не ограничено, можетъ происходить по всѣмъ направленіямъ и обусловливается только массою точки, состояніемъ ея (скоростью) и силами, приложенными къ точкѣ. Но бываютъ случаи, когда такой свободы движенія не существуетъ, при чемъ точка въ своемъ движеніи бываетъ ограничена тѣмъ или другимъ образомъ являясь слѣдовательно, точкой несвободной.

Примѣрами несвободнаго движенія могутъ служить слѣдующіе

1) Точка, лежащая на неподвижной горизонтальной плоскости внутрь которой она не можетъ проникнуть, будетъ несвободной по тому, что для нея перемѣщенія внизъ невозможны. Точка эта подвержена дѣйствію только силы тяжести а потому должна бы получить ускореніе по вертикали внизъ; въ дѣйствительности этого нѣтъ слѣдовательно, существуетъ нѣкоторая причина кромѣ вѣса точки препятствующая ея паденію; такимъ образомъ разсматриваемая несвободная точка не получаетъ того ускоренія которое имѣла бы точка свободная.

2) Тяжелая точка, висящая на концѣ неподвижно укрѣпленной нерастяжимой нити, не можетъ перемѣщаться по вертикали внизъ Точно такъ же и здѣсь разсматриваемая несвободная точка не получаетъ ускоренія, соотвѣтствующаго свободной точкѣ.

3) Точка, движущаяся по наклонной плоскости, также будетъ точкой несвободной, такъ какъ движеніе ея вслѣдствіе присутствія наклонной плоскости, ограничивающей свободу точки, будетъ инымъ нежели точки свободной, при наличности однихъ и тѣхъ же прочихъ условій. Дѣйствительно, свободная точка подъ дѣйствіемъ только силы тяжести будетъ двигаться или по вертикали (если начальная скорость ея равна нулю или направлена также по вертикали), или криволинейно по параболѣ (если начальная скорость имѣетъ направленіе отличное отъ вертикали).

§ 176. Замѣна причинъ, ограничивающихъ свободу движенія, силами.

Изъ приведенныхъ въ предыдущемъ параграфѣ примѣровъ ясно, что движеніе несвободной точки совершается не такъ, какъ мы могли бы того ожидать въ зависимости отъ состоянія точки, т. е. ея скорости въ данный моментъ и силъ, дѣйствующихъ на нее. Дѣйствительное движеніе будетъ отличаться отъ того движенія, которое было бы результатомъ нашихъ вычисленій, произведенныхъ по правиламъ, изложеннымъ выше въ динамикѣ свободной точки. Но разумѣется, разъ дѣйствительное движеніе не будетъ одинаково съ вычисленнымъ мы получимъ въ результатѣ то, что дѣйствительная скорость будетъ иная, нежели опредѣленная по указаннымъ формуламъ; въ послѣднюю будетъ внесено, слѣдовательно, нѣкоторое измѣненіе, приводящее ее къ дѣйствительной скорости точки.

Мы приходимъ такимъ образомъ къ заключенію, что вліяніе причинъ, измѣняющихъ движеніе несвободной точки по сравненію съ находящейся въ тѣхъ же условіяхъ (начальная скорость и дѣйствующія силы) свободной точкой, выражается тѣмъ, что несвободная точка получаетъ нѣкоторое добавочное ускореніе. Но мы всегда можемъ представить себѣ такую силу, которая сообщила бы точкѣ то же самое ускореніе; мы можемъ, слѣдовательно, присутствіе причины, ограничивающей свободу движенія точки, какова бы эта причина ни была, замѣнить такимъ образомъ подобранной силой, чтобы дѣйствіе ея, т. е. сообщаемое ею ускореніе, было бы какъ разъ равно ускоренію, производимому упомянутой причиной, которую послѣ этого можно представить себѣ уже не оказывающей никакого вліянія на движеніе точки, не существующей. А тогда точка оказывается свободной, при чемъ кромѣ прежнихъ силъ, дѣйствующихъ на нее, къ ней будетъ еще приложена вновь введенная сила. Но разъ точка будетъ свободной или, точнѣе, можетъ быть разсматриваема какъ точка свободная, то всѣ тѣ выводы, которые были сдѣланы выше въ динамикѣ свободной точки, будутъ имѣть мѣсто и здѣсь. Необходимо только добавить къ числу прежнихъ силъ нѣкоторую новую, замѣняющую и вмѣстѣ съ тѣмъ выражающую дѣйствіе причинъ ограничивающихъ свободу точки.

Разсмотримъ сначала въ общемъ видѣ, а затѣмъ на нѣсколькихъ частныхъ примѣрахъ, какъ можетъ быть опредѣлена величина такой силы.

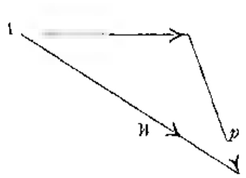
§ 177. Опредѣленіе величины силы, замѣняющей причину, ограничивающую свободу движенія точки.

Въ общемъ случаѣ вопросъ рѣшается такъ: пусть разсматриваемая точка A при наличности всѣхъ существующихъ обстоятельствъ, вліяющихъ на ея движеніе, имѣетъ въ данное мгновеніе ускореніе W (фиг. 151).

Если бы на нее дѣйствовали только приложенныя къ ней силы то ускореніе ея, положимъ, было бы w. Ускореніе W есть, очевидно ускореніе составное, слагающими котораго являются указанное ускореніе w и добавочное ускореніе p, которое мы найдемъ геометрическимъ построеніемъ на основаніи выраженія

$$\overline{p} = \overline{W} - w.$$

Слѣдовательно, нужно построить треугольникъ, въ которомъ ускореніе W должно быть замыкающей стороной. Данныя силы сообщаютъ ускореніе w, дѣйствіе же остальныхъ причинъ выражается сообщеніемъ ускоренія p, но то же ускореніе мы можемъ произвести, приложивъ къ точкѣ силу mp, если m — масса точки. Эта сила въ механическомъ смыслѣ будетъ равноцѣнна причинамъ ограничивающимъ свободу точки.



151

Приводимые въ слѣдующихъ параграфахъ частные примѣры представляютъ ни что иное, какъ примѣненіе высказаннаго общаго принципа для опредѣленія величины силы, ограничивающей свободу движенія точки

§ 178. Сила, замѣняющая дѣйствіе гибкой нити на удерживаемое ею тяжелое тѣло.

Представимъ себѣ тѣло вѣсомъ P, привязанное къ нити и перемѣщающееся въ томъ или другомъ направленіи съ нѣкоторымъ ускореніемъ k. Это дѣйствительное ускореніе, согласно изложенному, будетъ геометрической суммой: во первыхъ, ускоренія, сообщаемаго всѣми силами, дѣйствующими на тѣло (тѣло въ данномъ случаѣ мы разсматриваемъ какъ точку); такихъ силъ всего одна сила тяжести, ея ускореніе g; во вторыхъ, ускоренія, вызываемаго присутствіемъ нити. Обозначая его черезъ x напишемъ.

$$k = g + x$$

отсюда

$$x = k - g$$

Смотря по величинѣ и направленію k, x получитъ то или другое значеніе

1) $k = 0$. Полное ускореніе тѣла равно нулю, тѣло сохраняетъ свое состояніе т. е. находится въ покоѣ или движется съ постоянной по величинѣ и направленію скоростью; силы находятся въ равновѣсіи. При этомъ $x = - g$; ускореніе x и слѣдовательно самая сила вызываемая присутствіемъ нити и равная

$$mx = \frac{P}{g} x = - \frac{P}{g} \cdot g = - P$$

т. е. вѣсу тѣла, взятому съ обратнымъ знакомъ (что такъ и должно быть), направлена вверхъ.

2) Тѣло, вѣсомъ P, перемѣщается помощью нити по горизонтальному направленію съ ускореніемъ k (фиг. 152). Смотря по величинѣ k, мы найдемъ, какова будетъ величина x и направленіе ея, которое будетъ вмѣстѣ съ тѣмъ направленіемъ нити, такъ какъ послѣдняя предположена гибкой. Имѣемъ

$$x = \sqrt{k^2 - g}$$

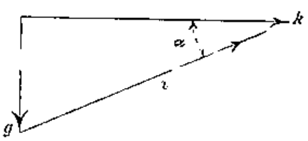
$$tg\,(k,\ x) = tg\,\alpha = \frac{g}{k}$$

Не трудно изслѣдовать, какъ будетъ измѣняться величина силы, заменяющей нить или, что то же, натяженіе нити (по закону противодѣйствія) съ измѣненіемъ угла α при одномъ и томъ же вѣсѣ точки. Дѣйствительно

$$P = mg.$$

Изъ треугольника имѣемъ

$$x = \frac{g}{\sin\alpha}$$



152

или, обозначая натяженіе нити черезъ X, находимъ подобное же соотношеніе для силъ X и P:

$$X = \frac{P}{\sin\alpha}.$$

Эта формула и доставляетъ матерьялъ для изслѣдованія, при чемъ слѣдуетъ разсматривать X какъ функцію α. Полезно результаты изобразить графически въ осяхъ $(\alpha,\ X)$.

3) Если тѣло перемѣщается по вертикали, т. е. ускореніе k имѣетъ вертикальное направленіе, подобно g, то и x будетъ направлено по вертикали и мы можемъ вмѣсто геометрической суммы взять алгебраическую

$$x = k - g$$

Въ томъ случаѣ, когда $k < 0$

$$x = -k - g = -(k + g)\ ^{*})$$

Дѣйствіе нити измѣряется суммою силъ $\frac{P}{g}k$ и P, что вполнѣ понятно, такъ какъ нить должна, во-первыхъ, уничтожать ускореніе силы тяжести и, во-вторыхъ, сообщить тѣлу ускореніе k.

*) Если тѣло находилось ранѣе дѣйствія силы въ покоѣ или обладало скоростью, направленною вверхъ, то оно будетъ при дѣйствіи силы двигаться вверхъ равноускоренно. Если же тѣло имѣло скорость, направленную внизъ, то движеніе его будетъ также внизъ, но равнозамедленнымъ.

По закону противодѣйствія нить въ свою очередь будетъ растягиваться силою

$$P_1 = \frac{P}{g}k + P = P\left(\frac{k}{g} + 1\right)$$

Чѣмъ болѣе будемъ ускорять подъемъ, т. е. увеличивать k, тѣмъ больше будетъ натяженіе нити; понятно теперь, почему при внезапномъ возрастаніи скорости движенія веревки, цѣпи, ремни и т. п. при поднималіи грузовъ иногда рвутся. Если намъ даны наибольшая величина k и вѣсъ груза P, мы найдемъ силу, растягивающую веревку.

Если $k > 0$, то численно

$$k < g$$

и слѣдовательно

$$\frac{P}{g}x < P$$

т. е. натяженіе веревки меньше вѣса груза.

§ 179. **Сила, выражающая дѣйствіе нити при движеніи тѣла по кругу.** Пусть привязанное къ нити тѣло движется равномѣрно по окружности, въ центрѣ которой укрѣпленъ свободный конецъ нити. Найдемъ силу, которою можетъ быть замѣнена нить.

При круговомъ равномѣрномъ движеніи тѣло имѣетъ, какъ мы знаемъ, ускореніе, направленное къ центру, называемое центростремительнымъ, величина котораго равна (§ 75)

$$\frac{v^2}{r},$$

гдѣ r — радіусъ окружности.

Въ данномъ случаѣ на тѣло никакія силы не дѣйствуютъ, такъ какъ оно движется по окружности равномѣрно, а сверхъ того предполагается невѣсомымъ, слѣдовательно, все ускореніе, которое тѣло имѣетъ, должно быть приписано вліянію нити, а потому сила, замѣняющая нить, если массу тѣла обозначимъ m, будетъ равна

$$\frac{mv^2}{r}. \tag{129}$$

Это и будетъ центростремительная сила. Приложивъ къ тѣлу эту силу, мы можемъ считать тѣло свободнымъ, а имѣя сверхъ того данными траекторію (радіусъ круга), начальную скорость и начальное разстояніе, мы будемъ имѣть вполнѣ заданнымъ его движеніе.

По началу противодѣйствія съ той же самой по величинѣ силой тѣло будетъ дѣйствовать на нить; но направленіе силы будетъ обратное — отъ центра, вслѣдствіе чего эта сила носитъ названіе центробѣжной. Изъ формулы (129) видно, какъ различные факторы вліяютъ на величину этой силы.

Если нить разорвется, то центростремительная сила перестаетъ дѣйствовать на тѣло, такъ какъ присутствіемъ своимъ сила эта обя зана только нити. Тѣло въ отсутствiи всякихъ силъ должно двигаться равномѣрно и прямолинейно, сохраняя свою скорость. Это мы и замѣчаемъ въ дѣйствительности, когда при разрывѣ нити тѣло движется прямолинейно по касательной къ кругу въ точкѣ, соотвѣтствующей мгновенiю разрыва. Направленiе касательной и будетъ представлять собою направленiе скорости въ это мгновенiе.

Такимъ образомъ, какъ только уничтожится центростремительная сила, движенiе точки по кругу нарушается.

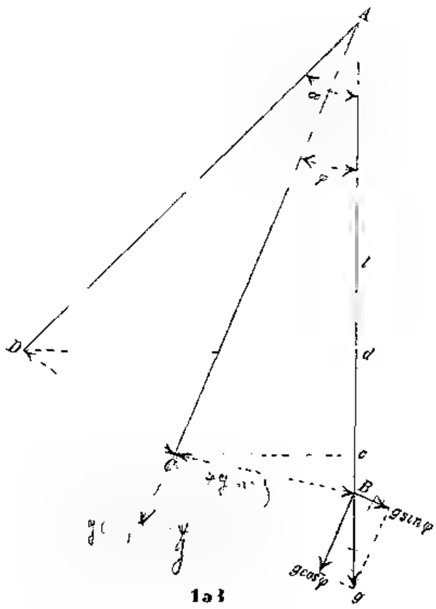
Центростремительная же сила уничтожится вслѣдствiе того, что нить разорвется подъ дѣйствiемъ силы центробѣжной; нить, слѣдовательно, должна быть настолько прочна чтобы выдержать разрывающее дѣйствiе этой силы.

Обстоятельство это нужно имѣть въ виду, напр. въ машинахъ при расчетѣ частей ихъ, подверженныхъ дѣйствiю центробѣжной силы, каковы напр. маховыя колеса.

§ 180. Сила, замѣняющая дѣйствiе нити въ математическомъ маятникѣ

Простой или математическiй маятникъ также можетъ служить примѣромъ движенiя несвободной точки.

Постараемся опредѣлить силу, съ которою дѣйствуетъ нить маятника на тяжелую точку его или, что то же, натяженiе нити маятника. Для этого представимъ себѣ, что маятникъ AB (фиг. 153), нить котораго будемъ считать нерастяжимой, невѣсомой и гибкой, отклоненъ на нѣкоторый уголъ α и затѣмъ предоставленъ самому себѣ; онъ начнетъ колебаться, отклоняясь въ обѣ стороны отъ вертикали на одинаковые углы. Найдемъ натяженiе нити для нѣкотораго произвольнаго угла φ. Тяжелая точка маятника движется по кругу, слѣдовательно имѣетъ центростремительное ускоренiе



153

$$i = \frac{v^2}{l},$$

гдѣ l — длина маятника и касательное ускореніе

$$k = \text{пр}\ \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

которое не будетъ равно нулю, такъ какъ на маятникъ дѣйствуетъ сила тяжести, не совпадающая, вообще говоря, съ направленіемъ нити. Если бы нити не было, то въ точкѣ C маятникъ имѣлъ бы ускореніе g направленное внизъ *). Маятникъ же имѣетъ ускореніе

$$c = n + k = \frac{v^2}{l} + \text{пр}\ \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$$

Слѣдовательно присутствіе нити вызываетъ ускореніе (§ 17)

$$p = n - g = \frac{v^2}{l} + \text{пр}\ \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) - g$$

Нить въ дѣйствительности остается прямолинейной, а такъ какъ мы предположили ее гибкой, то слѣдовательно, на нее дѣйствуютъ только силы, направленныя по ея длинѣ отъ центра качаній. Нить при этомъ по закону противодѣйствія будетъ дѣйствовать на качающуюся точку съ силой равной въ каждое мгновеніе силѣ, растягивающей нить, но имѣющей направленіе по длинѣ нити къ центру качаній. Слѣдовательно она можетъ вызвать только ускоренія, направленныя по ея длинѣ къ центру, нужно поэтому найти только составляющую ускоренія p по направленію нити. Касательное ускореніе

$$k = \text{пр}\ \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$$

даетъ составляющую равную нулю, нормальное ускореніе

$$n = \frac{v^2}{l}$$

цѣликомъ направлено по нити къ центру качаній.

Ускореніе g даетъ составляющую $-g\cos\varphi$

Примѣчаніе. Паралелограмъ силъ изъ точки B долженъ быть перенесенъ въ точку C.

Ставимъ минусъ потому, что направленіе этого ускоренія обратно нормальному ускоренію, направленіе котораго мы приняли за положительное. Итакъ

$$p = \frac{v^2}{l} - (-g\cos\varphi) = \frac{v^2}{l} + g\cos\varphi$$

*) Такъ какъ въ это мгновеніе движеніе маятника, переходя изъ ускореннаго въ замедленное, не имѣетъ ускоренія, то единственнымъ ускореніемъ было бы ускореніе силы тяжести g.

а сила, замѣняющая нить, если масса точки m, будетъ равна

$$P = m\left(\frac{v^2}{l} + g\cos\varphi\right) \tag{130}$$

Здѣсь надлежитъ опредѣлить величину скорости v, что можетъ быть сдѣлано примѣненіемъ закона живыхъ силъ, для перемѣщенія маятника отъ D до C. Для этого нужно найти работу, произведенную всѣми силами, приложенными къ точкѣ. Таковыми являются: 1) сила, замѣняющая нить, и 2) сила тяжести. Что касается работы ихъ на указанномъ протяженіи, то: 1) сила, замѣняющая нить, совершаетъ работу, равную нулю, такъ какъ направленіе ея остается все время перпендикулярнымъ къ траекторіи; 2) работа силы тяжести, какъ силы постоянной по величинѣ и направленію, выражается произведеніемъ ея на проекцію пройденнаго разстоянія на направленіе ея (§ 164), т. е. равна

$$mg \cdot dc = mg\,(Ac - Ad) =$$

$$= mg\,(l\cos\varphi - l\cos\alpha) = mgl\,(\cos\varphi - \cos\alpha)$$

Скорость въ точкѣ D равна нулю, а потому законъ живыхъ силъ приметъ въ разбираемомъ частномъ случаѣ такой видъ:

$$\frac{mv^2}{2} = mgl\,(\cos\varphi - \cos\alpha)$$

откуда

$$v^2 = 2gl\,(\cos\varphi - \cos\alpha).$$

Подставляя эту величину въ выраженіе (130), найдемъ силу P, замѣняющую дѣйствіе нити.

$$P = m\,[2g\cos\varphi - 2g\cos\alpha + g\cos\varphi] = mg\,[3\cos\varphi - 2\cos\alpha]$$

P_{max} будетъ при $\varphi = 0$, а именно

$$P = mg\,(3 - 2\cos\alpha)$$

Сила эта возрастаетъ съ увеличеніемъ угла α; при $\alpha = 90^\circ$

$$P = 3mg$$

По этой величинѣ силы должна быть расчитана нить на прочность.

§ 181. Давленіе наклонной плоскости на тѣло. (Реакція плоскости). Опредѣлимъ величину силы, съ которою дѣйствуетъ наклонная плоскость на движущееся по ней тѣло (фиг. 154), плоскость при этомъ предположимъ совершенно гладкою.

Изъ опыта извѣстно, что тѣло будетъ двигаться по плоскости съ постояннымъ ускореніемъ, равнымъ $g \cdot \sin\alpha$; (нечего добавлять, что движеніе прямолинейно). Слѣдовательно, равнодѣйствующая всѣхъ силъ, приложенныхъ къ тѣлу, будетъ силой постоянной (по величинѣ и направленію). Направленіе ея будетъ паралельно AB, а величина силы будетъ равна

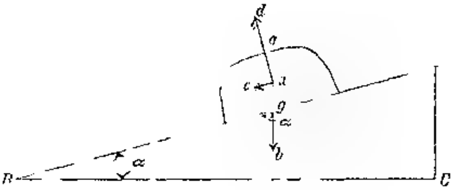
$$m \cdot g \sin\alpha = P \sin\alpha$$

гдѣ P — вѣсъ тѣла.

Теперь не трудно опредѣлить, въ чемъ выражается дѣйствіе наклонной плоскости.

Если бы наклонной плоскости не было, то тѣло падало бы по вертикальному направленію съ ускореніемъ, равнымъ g, такъ какъ на тѣло дѣйствовалъ бы только вѣсъ его.

Дѣйствіе наклонной плоскости заключается въ томъ, что ускореніе g измѣняется въ $g \sin\alpha$, паралельное направленію плоскости. Для того, чтобы изъ ускоренія g получить $g \sin\alpha$, нужно къ g прибавить геометрически, какъ это видно изъ чертежа (Δabc или паралелограммъ $abcd$), ускореніе $bc = g \cos\alpha$, которое будетъ перпендикулярно къ AB, а именно:



154.

$$g \sin\alpha = g + g \cos\alpha$$

Такимъ образомъ плоскость AB сообщаетъ движущемуся тѣлу ускореніе, равное $g \cos\alpha$, а по направленію перпендикулярное плоскости. Но то же самое ускореніе мы можемъ придать тѣлу, приложивъ къ нему силу $P \cos\alpha$, направленную одинаково съ $g \cos\alpha$ а тогда тѣло мы можемъ разсматривать свободнымъ и пользоваться для рѣшенія различныхъ вопросовъ, касающихся его движенія, выведенными выше уравненіями движенія.

Итакъ, можно сказать, что плоскость дѣйствуетъ на тѣло съ силой $g \cos\alpha$. Откуда является эта сила?

Очевидно, она есть слѣдствіе того, что тѣло оказываетъ на плоскость давленіе, равное $g \cos\alpha$, т. е. равное нормальной къ плоскости составляющей своего вѣса (по началу противодѣйствія). Говоримъ что давленіе плоскости есть слѣдствіе давленія тѣла, а не наоборотъ потому, что дѣйствіе плоскости существуетъ только тамъ, гдѣ ея касается тѣло, при томъ величина давленія плоскости зависитъ отъ давленія тѣла. Дѣйствіе плоскости есть сила, такъ сказать, пассивная, поэтому силу эту удачно называютъ реакціей плоскости. Реакція плоскости способна оказывать только противодѣйствіе, она можетъ лишь уменьшить ускореніе тѣла, причемъ дѣйствуетъ только въ извѣстномъ направленіи. Если бы тѣло удалилось отъ плоскости тотчасъ бы прекратилось дѣйствіе послѣдней.

Мы остановились нѣсколько дольше на разсмотрѣніи дѣйствія плоскости, такъ какъ подобный характеръ имѣютъ всѣ силы называемыя реакціями, общія имъ черты слѣдующія.

1. по положенію онѣ совпадаютъ съ перпендикуляромъ къ плоскости (или къ поверхности),

2. направлены отъ плоскости и

3. величина ихъ опредѣляется величиною нормальнаго давленія оказываемаго тѣломъ.

Такимъ образомъ направленіе реакціи оказывается вполнѣ опредѣленнымъ, неизвѣстна бываетъ величина ея. Послѣднюю легко найти посредствомъ слѣдующихъ данныхъ: вѣса тѣла, реакціи плоскости (по направленію) и равнодѣйствующей ихъ, заданной, вообще говоря, по направленію. Остается построить треугольникъ такъ, чтобы послѣдняя сила была замыкающей, для чего слѣдуетъ только провести изъ точки a (фиг. 154) линію ac паралельно AB до пересѣченія съ линіею bc, перпендикулярной къ AB: bc и опредѣлитъ искомую величину реакціи плоскости.

Тотъ же вопросъ можемъ рѣшить и нѣсколько иначе, пользуясь условіемъ равновѣсія свободной матерьяльной точки (§ 142), для котораго необходимо, чтобы всѣ силы, дѣйствующія на тѣло, составляли многоугольникъ или треугольникъ, какъ это имѣетъ мѣсто въ данномъ случаѣ. По предыдущему построимъ треугольникъ abc въ немъ сторона ca будетъ уже имѣть направленіе отъ c къ a и дастъ силу, которую нужно приложить къ точкѣ, чтобы удержать ее въ равновѣсіи. Реакція плоскости по прежнему будетъ равна bc.

Разсматривать точку или тѣло въ состояніи равновѣсія (въ частности покоя) является болѣе простымъ потому, что при этомъ не можетъ явиться никакого сомнѣнія относительно направленія силъ въ многоугольникѣ въ ту или другую сторону, такъ какъ въ указанномъ случаѣ всѣ силы должны быть направлены въ одну сторону, и если мы знаемъ направленіе хотя бы одной силы (какъ напр. въ приведенномъ случаѣ силы тяжести) мы легко найдемъ направленія прочихъ.

§ 182. О сопротивленіи при движеніи тѣла по плоскости. (Треніе)

Въ томъ случаѣ, когда наклонная плоскость не будетъ совершенно гладкой, что и встрѣчается обыкновенно въ дѣйствительности тѣло будетъ двигаться по плоскости съ ускореніемъ меньшимъ нежели $g \sin\alpha$ (фиг. 155). Примемъ вѣсъ тѣла равнымъ $mg = P = ac$.

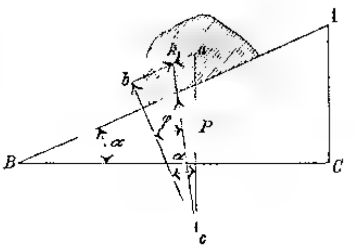
Построивъ по предыдущему прямоугольный треугольникъ abc, найдемъ силу $ab = m \cdot g \sin\alpha$ сообщающую тѣлу ускореніе $g \sin\alpha$.

Въ разсматриваемомъ же случаѣ ускореніе, которое имѣетъ тѣло будетъ меньше $g \sin \alpha$, слѣдовательно и сила его производящая будетъ меньше нежели $m \cdot g \sin \alpha$ ab

Положимъ, сила эта выразится векторомъ ak.

Какова будетъ теперь величина силы которою можетъ быть замѣнено дѣйствіе плоскости?

Построивъ на ac и ak треугольникъ, найдемъ отрѣзокъ ck, который и представитъ по величинѣ и направленію силу, являющуюся слѣдствіемъ присутствія плоскости. Характеръ того дѣйствія, которое оказываетъ плоскость на движеніе точки будетъ для насъ болѣе яснымъ, если мы разложимъ ck по двумъ направленіямъ: паралельному AB и перпендикулярному къ нему; мы найдемъ тогда силы cb и bk. Первая дастъ по предыдущему величину реакціи плоскости, равной $P \cos \alpha$, независящей отъ состоянія ея поверхности. Послѣдняя же сила bk будетъ характеризовать своей величиной состояніе именно этой поверхности. Чѣмъ ровнѣе будетъ поверхность, тѣмъ меньше будетъ сила, уменьшающая скорость движенія тѣла, тѣмъ меньше будетъ сопротивленіе встрѣчаемое тѣломъ при своемъ движеніи по плоскости и зависящее отъ состоянія ея поверхности. Сопротивленіе это, какъ извѣстно, называется треніемъ, и силой тренія мы назовемъ ту силу, которая является въ точкахъ касанія одного тѣла съ другимъ и которая уменьшаетъ скорость движущагося тѣла. Такъ какъ такое уменьшеніе можетъ продолжаться до того, что скорость сдѣлается равной нулю (но не далѣе, такъ какъ сила тренія есть сила пасивная), то треніе можетъ существовать не только при относительномъ движеніи, но и при покоѣ тѣлъ.



155.

Итакъ сила, выражающая дѣйствіе плоскости на тѣло, можетъ быть разложена на двѣ силы: нормальную—реакцію плоскости и касательную—силу тренія. Первая равна по величинѣ давленію (нормальному) тѣла на плоскость. Величину же второй находятъ посредствомъ опытовъ.

Сила $ab = P \sin \alpha$, движущая тѣло по наклонной плоскости зависитъ отъ угла, составляемаго ею съ горизонтомъ. Такъ какъ сила тренія есть сила пасивная, способная только оказывать сопротивленіе, но не сообщать покоющемуся тѣлу ускореніе, то тѣло, находящееся въ покоѣ придетъ въ движеніе только въ томъ случаѣ, если

$P \sin \alpha$ будетъ больше силы тренія $bk = F$. Какъ видно изъ чертежа это произойдетъ тогда, когда уголъ α будетъ больше угла $bck = \varphi$, называемаго *угломъ тренія*. До этого же предѣльнаго положенія тѣло будетъ находиться въ покоѣ, значитъ силы, на него дѣйствующія, будутъ находиться въ равновѣсіи, т. е. мы будемъ имѣть постоянно $F = P \sin \alpha$ при перемѣнной величинѣ угла α. Слѣдовательно сила тренія или сопротивленіе, оказываемое плоскостью по направленіи касательной къ ней, будетъ возрастать вмѣстѣ съ возрастаніемъ силы, перемѣщающей тѣло по плоскости, до нѣкотораго наибольшаго значенія этой силы, послѣ чего тѣло придетъ въ движеніе. Но въ послѣднее мгновеніе, когда тѣло еще было въ покоѣ, сопротивленіе плоскости противодѣйствовало его перемѣщенію. Отсюда также ясно, что сила тренія дѣйствуетъ не только при движеніи, но и при покоѣ тѣла.

Изъ треугольника bkc имѣемъ

$$bk = bc \, tg \, bck,$$

гдѣ bc представляетъ величину нормальнаго давленія, производимаго тѣломъ на плоскость, обозначая это давленіе черезъ N, имѣемъ:

$$F = N \, tg \, \varphi$$

т. е. *сила тренія равна нормальному давленію, умноженному на тангенсъ угла тренія*. Такимъ образомъ для нахожденія непосредственно по нормальному давленію силы тренія представляется удобнымъ знать прямо $tg\,\varphi$. Эта величина, называемая *коэффиціентомъ тренія* и обозначаемая черезъ f, содержится обыкновенно въ таблицахъ, составляемыхъ на основаніи данныхъ опытовъ.

Ниже приведены нѣкоторые изъ наиболѣе часто встрѣчающихся коэффиціентовъ тренія:

Бронза по чугуну	0,21	
» » желѣзу	0,16	
Дубъ по дубу:		
a) движеніе вдоль волоконъ .	0,48	
b) » поперекъ волоконъ	0,34	
c) торца вдоль волоконъ	0,19	
Кожаный ремень по чугуну . .	0,56	
Кирпичъ по кирпичу	0,55	0,7
Каменная кладка по бетону . . .	0,65	
» » » растительной землѣ.		
a) сухой и твердой . .	0,65	
b) средней . .	0,45	
c) сырой	0,30	
Смазанныя цапфы	0,02	

Изъ опытовъ найдены слѣдующіе законы относительно силы тренія:

1. Сила тренія зависитъ отъ матерьяла и состоянія трущихся поверхностей.

2. Сила тренія прямо пропорціональна нормальному давленію между тѣлами и не зависитъ отъ величины соприкасающихся поверхностей.

3. Сила тренія зависитъ отъ относительной скорости движенія тѣлъ.

§ 183. О сопротивленіи среды.

Разсматривая движеніе точки или тѣла, мы предполагали до сихъ поръ, что движеніе это совершается въ пустотѣ. Нѣсколько иначе происходитъ явленіе, если тѣло будетъ двигаться въ какой либо средѣ: воздухѣ, водѣ и т. п.

Среда будетъ оказывать вліяніе на движеніе тѣла, состоящее въ томъ, что скорость его будетъ постепенно уменьшаться при отсутствіи какихъ бы то ни было другихъ силъ, или, что то же, тѣло будетъ получать ускореніе направленное обратно его скорости по одной съ нею прямой.

Ясно, что то *же самое ускореніе можетъ быть придано движущемуся* тѣлу посредствомъ силы, величина которой равна произведенію массы тѣла на ускореніе, сообщаемое ему средой. Силу эту называютъ сопротивленіемъ среды. Вообразивъ ее приложенной къ тѣлу, мы можемъ разсматривать послѣднее какъ тѣло свободное, движущееся въ пустотѣ, на которое кромѣ силъ, къ нему приложенныхъ, будетъ дѣйствовать еще сопротивленіе среды.

Что касается свойствъ сопротивленія среды, его направленія и величины, то въ этомъ отношеніи имѣются слѣдующія найденныя изъ опыта, данныя:

1. Сопротивленіе среды совпадаетъ по положенію со скоростью тѣла (точки) въ данное мгновеніе, по направленію же оно обратно скорости тѣла.

2. Величина сопротивленія среды можетъ быть выражена въ общемъ видѣ слѣдующей формулой.

$$R = \alpha \frac{\gamma}{g} f(v),$$

гдѣ α — коефиціентъ, зависящій отъ формы движущагося тѣла; γ — удѣльный вѣсъ среды, слѣдовательно $\frac{\gamma}{g}$ — плотность среды; $f(v)$ — извѣстная функція скорости.

Что касается послѣдней, то Ньютономъ было дано выраженіе

$$f(v) = kv^2$$

гдѣ k — коефиціентъ пропорціональности Этой формулой и можно пользоваться при движеніи тѣлъ съ относительно небольшими скоростями (поѣздъ, экипажъ и т. д.)

Французскіе артиллеристы Піоберъ (Piobert), Моренъ (Morin) и Дидіонъ (Didion) изъ опытовъ стрѣльбы въ Мецѣ въ 1839 году нашли

$$f(v) = (a + bv)\, v^2$$

Если тѣло падаетъ въ пустотѣ, то ускореніе, сообщаемое ему силою тяжести, равно g. Если же паденіе происходитъ въ какой либо средѣ, напр. въ воздухѣ, то величина ускоренія w опредѣлится разностью

$$w = g - av^2,$$

гдѣ a — коефиціентъ пропорціональности. Отсюда видно, что по мѣрѣ увеличенія скорости паденія съ теченіемъ времени будетъ уменьшаться ускореніе падающаго тѣла, пока оно наконецъ не сдѣлается равнымъ нулю, и тѣло начнетъ двигаться равномѣрно со скоростью, величина которой опредѣлится изъ выраженія

$$g - av^2 = 0$$

$$\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Нужно добавить, что ускореніе тѣлъ, падающихъ въ воздухѣ, уменьшается еще и по другой причинѣ, а именно вслѣдствіе уменьшенія вѣса тѣла въ воздухѣ, что подтверждается извѣстнымъ опытомъ изъ физики.

§ 184. Задачи

1. Желѣзнодорожный вагонъ движется со скоростью 6 м./сек.

а) Черезъ сколько секундъ онъ остановится, будучи предоставленъ самому себѣ, если коефиціентъ сопротивленія движенію равенъ 0,005?

б) На какой длинѣ произойдетъ остановка?

2. Желѣзнодорожный поѣздъ вѣсомъ 120 тоннъ (безъ паровоза) долженъ имѣть черезъ 45 сек. послѣ начала движенія скорость 15 м. сек. (54 км. час). Какъ велика должна быть сила тяги, передаваемая паровозомъ поѣзду, если коефиціентъ тренія равенъ 0,005?

3. Во сколько разъ количество грузовъ, перевезенныхъ въ сутки лошадью при передвиженіи ихъ по рельсамъ, будетъ больше грузовъ, доставленныхъ ею при перевозкѣ по обыкновенной дорогѣ, если длительность дневной работы будетъ соотвѣтственно 10 и 8 час., коефиціентъ тяги 0,008 и 0,1 и скорость движенія 8 и 6 вер. въ часъ?

4. Найти коефиціентъ тренія желѣза по льду, если для равномѣрнаго движенія саней вѣсомъ 150 кгр. требуется сила 9 кгр.?

5. Можно ли сложить центробѣжную и центростремительную силу по правиламъ сложенія силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ?

6. Тяжелое тѣло, привязанное къ нити, движется равномѣрно по вертикальной окружности. Въ какой точкѣ ея натяженіе нити будетъ наибольшимъ?

7. Найти отношеніе между центробѣжною силою и вѣсомъ тѣла на экваторѣ, гдѣ радіусъ земли можно принять равнымъ 20 922 800 фут., а $g = 32{,}084$ ф. сек.^{2}

8. При какомъ числѣ оборотовъ земли въ сутки тѣла, находящіяся на экваторѣ, потеряютъ вѣсъ?

9. Тѣло вѣсомъ 100 кгр. нужно поднять на высоту 5 метр. по наклонной плоскости.

а) Найти уголъ наклона ея, если для поднятія мы располагаемъ силою въ 4 кгр.

б) Сколько времени будетъ совершаться подъемъ при скорости 0,5 м./сек.?

10. Точка движется внизъ по наклонной плоскости. Каковъ долженъ быть уголъ ея, чтобы путь, пройденный горизонтальной проекцией точки въ данное время, имѣлъ наибольшую величину?

11. По двумъ плоскостямъ съ углами наклона въ 20° и 30° съ одной и той же высоты безъ начальной скорости движутся два тѣла. Какъ разница въ пройденныхъ ими путяхъ будетъ черезъ 5 сек.?

156.

12. Составить выраженіе для вычисленія ускоренія a при движеніи тѣла по наклонной плоскости, если силу параллельную перемѣщенію и направленную вверхъ обозначимъ — P, вѣсъ тѣла — Q и уголъ наклона плоскости α?

13. Тѣло поднимается по наклонной плоскости съ угломъ въ 12°. Какую начальную скорость должно имѣть тѣло, чтобы оно пришло въ состояніе покоя поднявшись на высоту въ 60 м.?

14. Какое разстояніе проходитъ тѣло въ 5 сек. по наклонной плоскости съ угломъ въ 26°, если коефиціентъ тренія равенъ 0,3 и тѣло въ началѣ временъ находилось въ покоѣ?

15. Тѣло вѣсомъ въ 80 кгр. по наклонной плоскости съ угломъ въ 40° въ 10 сек. проходитъ 120 м. Каковъ коефиціентъ тренія f и какъ велико сопротивленіе тренія, препятствующее движенію?

16. Какое разстояніе въ тотъ же промежутокъ времени прошло бы тѣло при данныхъ предыдущей задачи?

17. Какой начальной скоростью должно обладать тѣло для того, чтобы подняться по наклонной плоскости въ 10°, длина которой равняется 10 м. при коефиціентѣ тренія въ 0,055?

18. Какое время употребитъ тѣло для подъема при данныхъ предыдущей задачи?

19. Съ какой высоты h (фиг. 156) по наклонной плоскости (безъ тренія) долженъ спуститься шаръ, чтобы описать круговой путь радіусомъ 5 м.

Рѣшенія задачъ.

1. а) 122 сек.; б) 366 м.

2. Поѣздъ долженъ имѣть ускореніе

$$j = \frac{v - v_0}{t} = \frac{15 \text{ м./сек.}}{45 \text{ сек.}} = \frac{1}{3} \text{ м./сек.}^2$$

Для этого необходима сила

$$I = mj = \frac{P}{g} k = \frac{120000}{9{,}81} \cdot \frac{1}{3} = 4080 \text{ кгр.}$$

Сверхъ того для преодолѣнія силы тренія требуется

$$120.000 \cdot 0{,}005 = 600 \text{ кгр.}$$

Искомая сила тяги равна 4680 кгр.

3. Приблизительно въ 21 разъ.

5. Нѣтъ, такъ какъ силы эти приложены къ различнымъ точкамъ (конецъ нити и привязанное къ ней тѣло).

6. Въ нижней точкѣ окружности, гдѣ къ натяженію нити вслѣдствіе центробѣжной силы присоединяется натяженіе подъ дѣйствіемъ силы тяжести.

7. Около $\frac{1}{200}$.

8. $n = 17$.

9. а) $\sin\alpha = 0{,}04$, $\alpha = \infty 2^\circ 15'$.

б) Длина наклонной плоскости

$$l = \frac{5}{\sin\alpha} = \frac{5}{0{,}04} = 125 \text{ м.};$$

время подъема тѣла

$$\frac{125}{0{,}5} = 250 \text{ сек.} = 4 \text{ мин. } 10 \text{ сек.}$$

10. 45°; величина проекціи $\frac{gt^2}{4}$.

11. 19,372 м.

12. $w = g \frac{Q \sin\alpha - P}{Q}$.

13. 34,31 м. сек.

14. 20,69 м.

15. $f = 0{,}52$. $I = 31{,}86$ кгр.

16. 315,28 м.

17. 9,455 м. сек.

18. $t = 0{,}423$ сек.

19. Если v — скорость въ низшей точкѣ кругового пути, а v_2 —

къ высшей, то по уравненію работъ имѣемъ:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} = P\,2r = mg\,2r$$

гдѣ P — вѣсъ тѣла. Для того, чтобы тѣло, находясь въ верхней точкѣ, не упало внизъ, должно быть

$$\frac{mv_2^2}{r} \geqq P \text{ или } \frac{v_2^2}{r} \geqq g$$

Отсюда находимъ v_2. Затѣмъ изъ уравненія живыхъ силъ опредѣляемъ v_1. Соотвѣтственно v_1 найдемъ высоту наклонной плоскости изъ уравненія живыхъ силъ.

$$Ph = \frac{mv_1^2}{2} \text{ или } h = \frac{v_1^2}{2g}$$

ГЛАВА XIX

О моментахъ силъ

§ 185. Моментъ силы относительно точки

Моментомъ силы F (фиг. 157) относительно данной точки O называется произведеніе изъ величины этой силы на длину перпендикуляра OB, опущеннаго изъ точки O на направленіе силы. Обозначая моментъ буквою M, изложенное опредѣленіе мы можемъ представить въ слѣдующемъ видѣ

$$M = F \cdot d$$

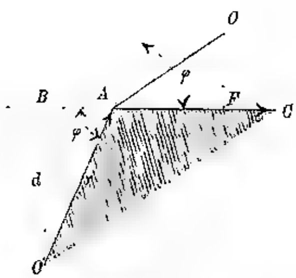
при чемъ $OB = d$.

Точкѣ O присваивается названіе центра моментовъ, перпендикуляръ же d называется плечомъ силы F. Если сила проходитъ черезъ данную точку, то плечо ея будетъ равно нулю, а слѣдовательно, и моментъ ея также будетъ равенъ нулю.

Если проведемъ линію OC, то величина площади треугольника OAC будетъ измѣряться произведеніемъ

$$\frac{AC \cdot OB}{2} = \frac{Fd}{2} = \frac{M}{2}$$

т. е. площадь эта равна половинѣ момента силы F относительно точки O.

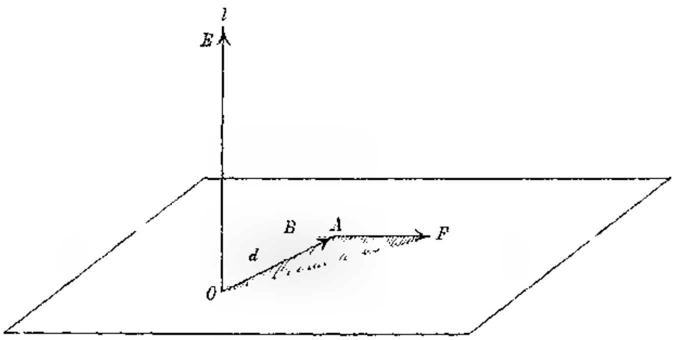


157

Моментамъ силъ кромѣ абсолютной величины приписываютъ еще знакъ, а именно: если сила стремится перемѣщать точку A, къ которой она приложена, такъ что линія r будетъ при этомъ двигаться по направленію часовой стрѣлки, какъ это мы имѣемъ на фиг. 157, то такой моментъ называется положительнымъ. Моментъ той же силы F, но относительно нѣкоторой точки O_1, будетъ отрицательнымъ, такъ какъ сила стремится вращать линію O_1A по направленію обратному часовой стрѣлкѣ.

Легко видѣть, что только что изложенное опредѣленіе знака момента заключаетъ въ себѣ нѣкоторую неполноту, могущую дать поводъ къ недоразумѣніямъ. Дѣйствительно, если мы можемъ смотрѣть на силу F и точку O, а слѣдовательно, и на плоскость OAF, ихъ заключающую, съ противоположной стороны (съ обратной стороны бумаги, на которой онѣ изображены), то моментъ силы F относительно той же самой точки O будетъ уже отрицательнымъ.

Для исключенія подобной неточности нужно каждый разъ опредѣлять ту сторону, съ которой будетъ разсматриваться плоскость OAF, а для этого можно поступить такъ (фиг. 158): проведемъ изъ начала моментовъ линію Ol, перпендикулярную къ плоскости OAF



158

и дадимъ ей направленіе отъ этой плоскости въ сторону наблюдателя. Если подобная линія или ось будетъ дана, то знакъ даннаго момента будетъ опредѣленъ точно.

§ 186. Изображеніе момента силы векторомъ (линейный моментъ силы).

Вычисливъ величину момента $M = Fd$, отложимъ ее въ извѣстномъ масштабѣ по оси Ol (фиг. 158), сообразуясь съ направленіемъ оси, т. е. если разсматриваемый моментъ былъ положительнымъ, то величину, изображающую его, отложимъ по направленію оси Ol (какъ напр. въ данномъ случаѣ отрѣзокъ OE); если же моментъ былъ отрицательнымъ, то величина его должна быть отложена по оси Ol въ обратномъ направленіи. Для момента силы F относительно точки O мы получимъ векторъ OE, который вполнѣ опредѣляетъ собою этотъ моментъ. Въ самомъ дѣлѣ:

1) своимъ положеніемъ въ пространствѣ (ось Ol) и своимъ началомъ (точка O) векторъ OE опредѣляетъ положеніе перпендикулярной къ нему плоскости OAF, заключающей силу F и центръ моментовъ O

2) направленіе вектора, совпадающее съ направленіемъ оси Ol опредѣляетъ знакъ момента и, наконецъ,

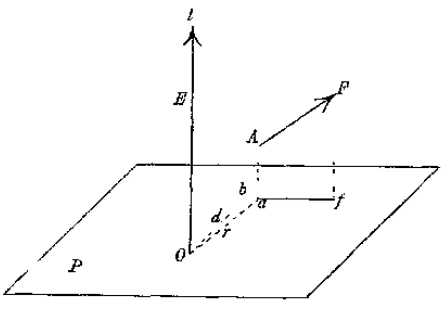
3) величина вектора OE выражаетъ величину момента M.

Въ силу сказаннаго вектору OE присваиваютъ названіе линейнаго момента силы F относительно точки O.

Разсмотрѣнное до сихъ поръ опредѣленіе момента силы относительно точки, равно какъ и изображеніе этого момента векторомъ можетъ быть распространено и на моменты другихъ геометрическихъ величинъ, каковы напр. скорости, хорды перемѣщеній и т. п. Такъ какъ для этихъ величинъ такъ же, какъ и для силъ были выведены теоремы паралелограма векторовъ, то все излагаемое далѣе относительно соотношеній между моментами силъ можетъ быть примѣнено и для моментовъ скоростей и другихъ геометрическихъ величинъ.

§ 187. Моментъ силы относительно оси

Моментомъ силы F относительно оси l называется произведеніе изъ проекціи силы на плоскость перпендикулярную къ оси, на разстояніе этой проекціи до оси (или до точки пересѣченія плоскости проекціи съ осью).



159

Основываясь на этомъ опредѣленіи, для нахожденія момента M силы F относительно оси Ol (фиг. 159) мы проводимъ произвольную плоскость P, перпендикулярную къ оси Ol, проектируя на нее силу F, получаемъ проекцію af, опускаемъ на направленіе этой проекціи изъ точки O встрѣчи оси съ плоскостью перпендикуляръ d и окончательно находимъ

$$M = af \cdot d$$

Если сила пересѣкаетъ ось, то моментъ ея относительно этой оси равенъ нулю, такъ какъ $d = 0$. Моментъ силы будетъ равенъ нулю и въ томъ случаѣ, когда сила паралельна оси, такъ какъ проекція силы обращается въ точку.

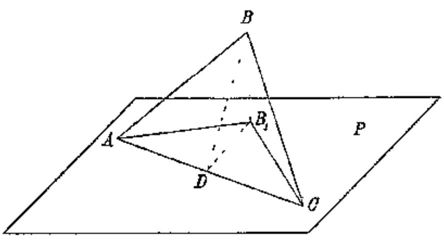
Подобно изложенному выше, и здѣсь моментъ силы можетъ быть представленъ векторомъ, совпадающимъ по положенію съ осью моментовъ. Такъ въ приведенномъ примѣрѣ моментъ силы F относительно оси Ol можетъ быть представленъ векторомъ OE, величина которого, взятая въ соотвѣтствующемъ масштабѣ, равна разсматриваемому моменту. Ось OI получила направленіе въ зависимости отъ положенія наблюдателя передъ чертежомъ, согласно сказанному въ предыдущемъ параграфѣ, векторъ же OE, выражающій моментъ силы F, совпадаетъ по направленію съ осью потому, что моментъ этотъ имѣетъ положительный знакъ

Легко видѣть, что все, относящееся къ моменту силы относительно точки, представляетъ только частный случай момента силы относительно оси Дѣйствительно, если сила лежитъ въ плоскости, перпендикулярной къ оси, то моментъ такой силы относительно оси будетъ равенъ произведенію самой силы на разстояніе ея до оси

Если моментъ какой-либо силы относительно данной точки будетъ равенъ нулю, то онъ будетъ равенъ нулю и относительно любой оси, проведенной черезъ данную точку. Дѣйствительно, сила, находясь въ одной плоскости съ точкой, можетъ имѣть моментъ равный нулю только въ томъ случаѣ, когда ея направленіе проходитъ черезъ точку: а въ такомъ случаѣ направленіе силы всегда пройдетъ черезъ любую ось, проведенную черезъ данную точку слѣдовательно, моментъ силы относительно оси будетъ нулемъ.

§ 188. Соотношеніе между площадью треугольника и проекціей ея на произвольную плоскость.

Разсмотримъ сначала тотъ случай, когда плоскость проекцій проходитъ черезъ одну изъ сторонъ треугольника: пусть на фиг. 160 ABC проектируемая площадь, P — площадь проекцій, съ которой совпадаетъ сторона AC проектируемаго треугольника



160

Опустимъ изъ точки B перпендикуляръ на плоскость P; соединимъ основаніе его B_1 съ точками A и C. Тогда площадь AB_1C будетъ проекціей треугольника ABC. Проведемъ черезъ линію BB_1 плоскость перпендикулярную къ линіи AC. Плоскость эта съ имѣющимися плоскостями пересѣчется по линіямъ BD и B_1D, перпендикулярнымъ къ AC; слѣдовательно онѣ будутъ высотами треугольниковъ ABC и AB_1C; уголъ же BDB_1 будетъ угломъ между плоскостями ABC и P, а линія B_1D проекціей линіи BD, а потому имѣемъ

$$B_1D = BD\cos BDB_1,$$

или, умножая обѣ части этого равенства на AC и дѣля на два найдемъ:

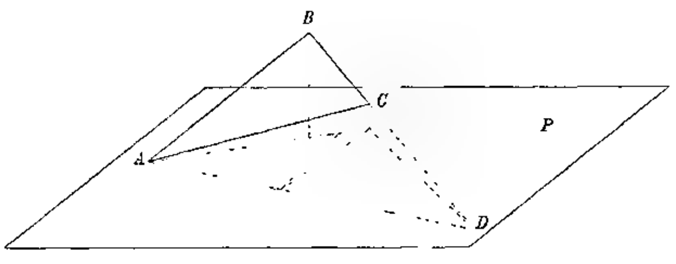
$$\frac{AC \cdot B_1D}{2} = \frac{AC \cdot BD}{2} \cos BDP$$

или

$$\text{площ. } AB_1C = \text{площ. } ABC \cdot \cos BDB_1, \qquad (131)$$

слѣдовательно проекція площади треугольника на произвольную плоскость равна произведенію проектируемой площади на cos угла между нею и плоскостью проекцій.

Ввиду того, что проекція данной площади на плоскость паралельную послѣдней, равна проектируемой площади, доказанная теорема будетъ справедлива для проекцій на любую плоскость, паралельную одной изъ сторонъ проектируемаго треугольника.



161

Ее не трудно доказать и для случая, когда одна изъ вершинъ треугольника лежитъ на плоскости проекцій: такъ, если имѣемъ треугольникъ ABC и плоскость проекцій P (фиг. 161), то проводя сторону BC до пересѣченія съ плоскостью P въ точкѣ D и соединяя послѣднюю съ точкою A, мы будемъ имѣть соотношеніе

$$ABC = ABD - ACD$$

Но послѣдния двѣ площади одной стороной совпадаютъ съ плоскостью P, а потому, пользуясь только что доказаннымъ положеніемъ относительно такихъ плоскостей, не трудно распространить его и на разсматриваемый, а слѣдовательно и на какой угодно случай относительнаго положенія треугольника и плоскости.

§ 189. Соотношеніе между моментами силы относительно оси и точки

Найдемъ теперь соотношеніе между моментами данной силы относительно оси и точки. При обозначеніяхъ, принятыхъ на фиг. 162 имѣемъ

Моментъ силы F относительно точки O равенъ $F \cdot D$, откладывая $OA = F \cdot D$ по направленію, перпендикулярному къ плоскости Q, за ключающей силу F и точку O, получимъ линейный моментъ силы F относительно точки O. Моментъ силы F относительно произвольной оси l, проходящей черезъ точку O, выражается произведеніемъ $f \cdot d$. Но такъ какъ $\Delta O_1B_1C_1$ представляетъ проекцію ΔOBC, то на основаніи доказаннаго въ предыдущемъ параграфѣ имѣемъ:

$$\Delta O_1B_1C_1 = \Delta OBC \cdot \cos(P, Q)$$

или

$$f \cdot d = F \cdot D \cdot \cos(P, Q).$$

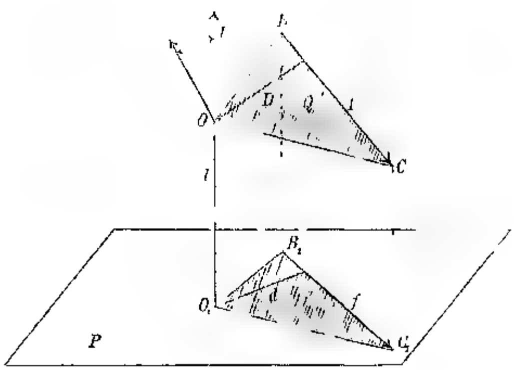
Но уголъ между плоскостями измѣряется угломъ между перпендикулярами къ нимъ и слѣдовательно

$$\cos(P, Q) = \cos(OA, l),$$

а потому

$$f \cdot d = F \cdot D \cdot \cos(OA, l) = OA \cdot \cos(OA, l) = OL, \qquad (132)$$

что можетъ быть выражено такъ: моментъ силы относительно



162

оси равенъ проекціи на эту ось линейнаго момента той же силы относительно какой-либо точки этой оси (такъ какъ точка O есть произвольная точка оси l). Въ силу изложеннаго векторъ OL называютъ линейнымъ моментомъ силы относительно оси, при чемъ не трудно въ каждомъ частномъ случаѣ найти его направленіе при данной оси l.

§ 190. Соотношеніе между моментомъ силы относительно точки и моментами относительно трехъ осей, проходящихъ черезъ точку.

Какъ всякій векторъ, линейный моментъ OA силы F относительно точки можетъ быть заданъ своими проекціями на три взаимно-перпендикулярныя оси, при чемъ каждая изъ проекцій на основаніи только что доказаннаго, будетъ представлять моментъ той же силы F

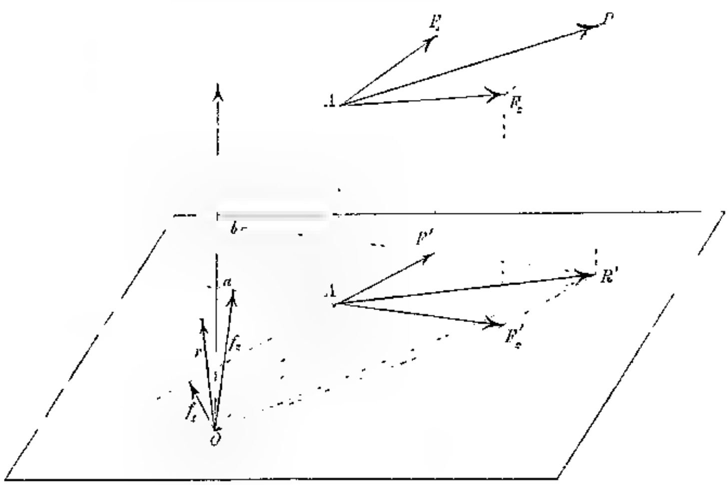
относительно оси, на которую спроектированъ моментъ OA: всѣ же три проекціи, геометрически сложенныя, дадутъ въ суммѣ величину самого вектора или момента силы относительно точки. Принимая для моментовъ какой либо силы F относительно точки O и произвольной оси Ol соотвѣтственно слѣдующія обозначенія:

$$M(F)_O \text{ и } M(F)_{Ol}$$

для моментовъ силы F относительно точки O и трехъ взаимноперпендикулярныхъ осей Ox, Oy, Oz, проходящихъ черезъ эту точку, получимъ слѣдующее соотношеніе:

$$M(F)_O = M(F)_{Ox} + M(F)_{Oy} + M(F)_{Oz} \qquad (133)$$

т. е. моментъ силы относительно точки равенъ геометрич-



163

ской суммѣ моментовъ той же силы относительно трехъ взаимноперпендикулярныхъ осей, проходящихъ черезъ эту точку.

§ 191. Моментъ равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ точкѣ

Моментъ равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ точкѣ, или что то же, силъ сходящихся относительно какой либо оси равенъ алгебраической суммѣ моментовъ силъ составляющихъ относительно той же оси.

Разсмотримъ сначала двѣ силы F_1 и F_2, приложенныя къ точкѣ A и ихъ равнодѣйствующую R (фиг. 163). Моменты этихъ силъ будутъ соотвѣтственно

$$M(F_1)_O = F_1 . f_1,$$
$$M(F_2)_O = F_2' . f_2,$$
$$M(R)_O = R' . r.$$

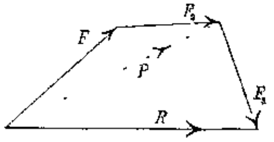
Требуется доказать, что

$$R . r = F_2 . f_2 + F_1' . f_1$$

или

$$M(R)_O = M(F_1)_O + M(F_2)_O$$

Соединяя точку O съ точкою A и съ точками F_1', F_2 и R, мы получимъ треугольники $OA'F_1'$, $OA'F_2'$ и $OA'R'$, площади которыхъ будутъ равны половинамъ моментовъ соотвѣтствующихъ силъ (§ 185).



164

Разсматривая же четыреугольникъ $OA'F_1'R$, въ которомъ каждая изъ діагоналей OF_1' и $A'R$ дѣлитъ его на два треугольника, можемъ написать:

$$OA'F_1' + OF_1'R' = OA'R + A'F_1'R$$

или

$$OA'F_1' + (OF_1'R - A'F_1'R) = OA'R.$$

Разность же площадей треугольниковъ, стоящая въ скобкахъ равна

$$\frac{F_1'R . Ob}{2} - \frac{F_1'R' . ab}{2} = \frac{F_1'R' . Oa}{2} = OA'F_2',$$

слѣдовательно

$$OA'F_1' + OA'F_2' = OA'R.$$

А такъ какъ площади эти равны половинамъ моментовъ силъ R, F_1 и F_2 относительно оси Ol, то

$$M(R)_{Ol} = M(F_1)_{Ol} + M(F_2)_{Ol}. \qquad (134)$$

Если же обѣ слагаемыя силы, а слѣдовательно и ихъ равнодѣйствующая лежатъ въ плоскости, перпендикулярной къ оси (пусть таками будутъ R, F_1 и F_2), то вмѣсто разсмотрѣнія моментовъ относительно оси l мы можемъ разсматривать моменты относительно точки O и сказать, что моментъ равнодѣйствующей сходящихся силъ относительно данной точки равняется алгебрической суммѣ моментовъ силъ составляющихъ относительно той же точки.

Все доказанное въ отношеніи двухъ составляющихъ силъ безъ труда можетъ быть распространено на случай какого угодно числа ихъ. Такъ, если мы имѣемъ силу R, равнодѣйствующую трехъ силъ F_1, F_2, F_3, не лежащихъ, вообще говоря, въ одной плоскости (фиг. 164), то для двухъ силъ F_1, F_2 и равнодѣйствующей ихъ P можемъ по доказанному написать:

$$M(P)_{Ol} = M(F_1)_{Ol} + M(F_2)_{Ol}$$

Точно такъ же, разсматривая силы P и F_3 и равнодѣйствующую ихъ R имѣемъ:

$$M(R)_O = M(P)_O + M(F_3)_O$$

или, вставляя вмѣсто $M(P)$ величину его изъ предыдущаго равенства окончательно находимъ

$$M(R)_{O1} = M(F_1)_{O1} + M(F_2)_{O1} + M(F_3)_{O1}.$$

Въ самомъ общемъ случаѣ для составляющихъ силъ $F_1, F_2, F_3 \ldots F_n$ и ихъ равнодѣйствующей будемъ имѣть:

$$M(R)_O = \sum_1^n M(F)_O \qquad (134г)$$

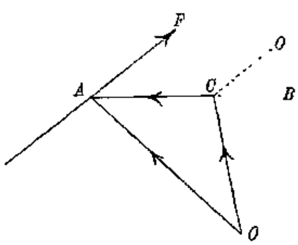
§ 192. Сумма моментовъ силъ, находящихся въ равновѣсіи.

Если силы, приложенныя къ точкѣ, находятся въ равновѣсіи, то равнодѣйствующая ихъ будетъ равна нулю, а слѣдовательно будетъ равенъ нулю и моментъ равнодѣйствующей относительно какой угодно оси. А такъ какъ моментъ равнодѣйствующей равенъ суммѣ моментовъ силъ составляющихъ, то въ случаѣ равновѣсія силъ, приложенныхъ къ точкѣ, сумма моментовъ ихъ относительно какой угодно оси будетъ равна нулю.

Не слѣдуетъ дѣлать однако обратнаго заключенія, такъ какъ сумма моментовъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ и не уравновѣшивающихся взаимно, будетъ равна нулю и въ томъ случаѣ, когда центръ моментовъ будетъ лежать на продолженіи равнодѣйствующей.

§ 193. Соотношеніе между моментами силъ относительно различныхъ точекъ.

Пусть будетъ дана сила F и центръ моментовъ O (фиг. 165). Найдемъ зависимость, которая будетъ существовать между моментами ея относительно центра O и нѣкотораго новаго центра O_1, не лежащаго, вообще говоря, въ одной плоскости съ силой F и центромъ O.



165

Проведемъ черезъ точку O_1 плоскость, перпендикулярную къ силѣ F. Изъ точки пересѣченія ихъ A проведемъ линію AO_1 и линію AB представляющую пересѣченіе проведенной плоскости съ плоскостью, заключающею силу F и старый центръ O. Проведемъ сверхъ того черезъ O линію параллельную силѣ F до пересѣченія ея съ линіей AB въ точкѣ C. Соединивъ точки O и C и давъ сторонамъ тре угольника $A O_1 O$ направленія, указанныя на чертежѣ, получимъ

$$\overline{O_1A} = \overline{CA} + \overline{O_1C}$$

и и

$$\overline{F.O_1A} = \overline{F.CA} + \overline{F.O_1C}$$

Но

$$\overline{F.O_1A} = \overline{M(F)_{O_1}}$$

$$\overline{F.CA} = \overline{M(F)_O}$$

и $\overline{F.O_1C}$ представляетъ моментъ силы F, перенесенной паралельно самой себѣ въ старый центръ, относительно новаго центра. Обозначая его черезъ $\overline{M(F_0)_{O_1}}$, получимъ

$$\overline{M(F)_{O_1}} = \overline{M(F)_O} + \overline{M(F_0)_{O_1}},$$

т. е. моментъ какой-либо силы относительно новаго центра равенъ моменту той же силы относительно прежняго центра, сложенному геометрически съ моментомъ силы, перенесенной паралельно самой себѣ въ старый центръ относительно новаго центра.

§ 194. Соотношеніе между суммами моментовъ однихъ и тѣхъ же силъ относительно разныхъ точекъ *)

Соотношеніе между моментами относительно разныхъ центровъ найденное въ предыдущемъ параграфѣ для одной силы, распространяется безъ затрудненія и на случай нѣсколькихъ силъ. Дѣйствительно, если намъ даны силы F_1, F_2, F_3 ..., имѣющія, вообще говоря, различныя точки приложенія, то по доказанному для каждой изъ нихъ можемъ написать.

$$\overline{M(F_1)_{O_1}} = \overline{M(F_1)_O} + \overline{F_1 a_1}$$

$$\overline{M(F_2)_{O_1}} = \overline{M(F_2)_O} + \overline{F_2 a_2},$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

гдѣ a_1, a_2, a_3 ... суть разстоянія отъ центра O_1 до силъ, перенесенныхъ паралельно самимъ себѣ въ центръ O, или, что то же, моменты силъ, приложенныхъ въ точкѣ O относительно центра O_1.

Складывая соотвѣтственные члены, найдемъ

$$\sum \overline{M(F)_{O_1}} = \sum \overline{M(F)_O} + \sum \overline{Fa}.$$

Въ этомъ выраженіи послѣдній членъ представляетъ сумму моментовъ силъ, паралельныхъ даннымъ, но приложенныхъ въ одной точкѣ O. Сумма моментовъ такихъ силъ равна моменту ихъ равно-

*) Выводы настоящаго параграфа находятъ примѣненіе ниже въ главѣ XXIV.

дѣйствующей, т. е.

$$\sum \overline{Fa} = M\,(R)_{O_1}.$$

Въ частномъ случаѣ, если данная система силъ, будучи перенесена въ точку O, даетъ равнодѣйствующую равную нулю, для чего необходимо лишь, чтобы сумма проекцій данныхъ силъ на любую ось была равна нулю (§ 142), послѣдній членъ второй части равенства обращается въ нуль и мы получимъ

$$\sum \overline{M}\,(\overline{F})_O = \sum M\,(F)_O = Const \qquad (135)$$

слѣдовательно, если сумма проекцій данной системы силъ на любую ось будетъ нулемъ, то сумма моментовъ такихъ силъ сохраняетъ свою величину относительно всякаго центра.

Послѣднее условіе можетъ быть выражено посредствомъ суммъ моментовъ относительно трехъ взаимноперпендикулярныхъ осей, проходящихъ въ данномъ случаѣ черезъ произвольную точку пространства (§ 190). Мы можемъ сказать, что если суммы проекцій силъ на каждую изъ трехъ прямоугольныхъ осей порознь равны нулю, то сумма моментовъ такихъ силъ не зависитъ отъ выбора центра моментовъ, за который принимается обыкновенно начало координатъ данной системы прямоугольныхъ осей.

Простѣйшимъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ типичнымъ примѣромъ силъ, сумма моментовъ которыхъ не зависитъ отъ выбора центра моментовъ, является такъ наз. пара силъ, состоящая изъ двухъ силъ паралельныхъ, между собою, равныхъ по величинѣ но обратно направленныхъ.

§ 195. Аналитическое выраженіе суммы моментовъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ.

Обозначимъ силы, приложенныя къ точкѣ, черезъ $F_1, F_2, F_3, \ldots F_n$, а проекціи ихъ на три взаимноперпендикулярныя оси Ox, Oy и Oz, черезъ:

$$\begin{matrix} X_1, & Y_1, & Z_1, \\ X_2, & Y_2, & Z_2, \\ X_3, & Y_3, & Z_3, \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \\ X_n, & Y_n, & Z_n \end{matrix}$$

Равнодѣйствующую же всѣхъ перечисленныхъ силъ и проекціи ея на тѣ же оси обозначимъ черезъ

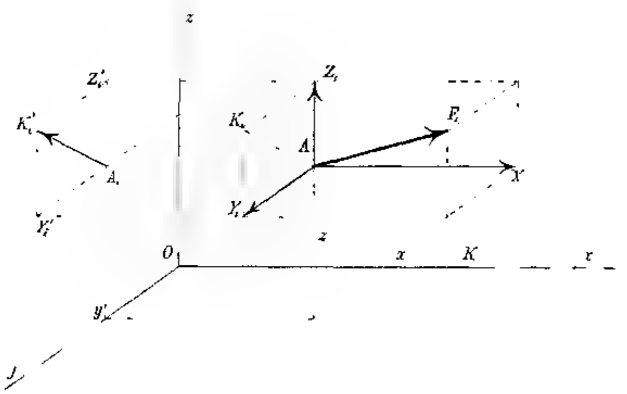
$$R,\ X,\ Y,\ Z$$

Найдемъ первоначально моментъ одной какой-либо силы F_i относительно каждой изъ осей Ox, Oy и Oz (фиг. 166).

Моментъ силы F_i относительно оси Ox согласно определенію будетъ равенъ произведенію изъ проекціи силы на плоскость, перпендикулярную къ этой оси, т. е. на плоскость yOz, или на плоскость ей паралельную, на разстояніе этой проекціи до оси Ox. Проекція силы F_i на плоскость yOz будетъ $A'K_i' = AK_i$. Разложимъ силу AK_i на двѣ составляющихъ Y_i и Z_i, которыя будутъ вмѣстѣ съ тѣмъ и составляющими силы F_i, а потому можемъ написать

$$M(K_i)_{Ox} = M(Y_i)_{Ox} + M(Z_i)_{Ox}.$$

Но моменты силъ Y_i и Z_i относительно оси Ox или равныхъ имъ



166

силъ Y_i и Z_i относительно той же оси (или точки O), выражаются очень просто въ зависимости отъ координатъ z и y точки A или A а именно:

$$M(Y) = M(Y_i') = -Y_i z,$$

$$M(Z_i) = M(Z_i') = Z_i y.$$

Передъ моментомъ силы Y_i ставимъ знакъ минусъ потому, что наблюдателю, находящемуся внутри тѣлеснаго угла $Oxyz$, или смотрящему на плоскость yOz изъ какой нибудь точки на оси Ox, выбранной такъ, чтобы ось имѣла направленіе отъ плоскости yOz къ наблюдателю, сила эта представляется стремящейся вращать плечо Oz по направленію обратному часовой стрѣлкѣ.

Итакъ для момента силы K_i относительно оси Ox находимъ такое выраженіе:

$$M(K_i)_{Ox} = Z_i y - Y$$

Моментъ же силы F_1 относительно оси Ox равенъ

$$M(X_1) + M(Y_1) + M(Z_1) = M(X_1) + M(K_1);$$

а такъ какъ сила X_1 паралельна оси Ox, то проекція этой силы на плоскость yOz будетъ равна нулю, а слѣдовательно будетъ равенъ нулю и моментъ силы X_1 относительно оси Ox, а потому

$$M(F_1)_{Ox} = M(K_1)_{Ox} = Z_1 y - Y_1 z.$$

Подобнымъ же образомъ, найдемъ моменты силы F_1 относительно другихъ осей Oy и Oz. Не приводимъ всѣхъ соображеній, совершенно аналогичныхъ только что изложеннымъ, такъ какъ читатель самъ найдетъ слѣдующія выраженія моментовъ:

$$M(F_1)_{Oy} = X_1 z - Z_1 x,$$
$$M(F_1)_{Oz} = Y_1 x - X_1 y$$

А затѣмъ не трудно найти и выраженія моментовъ равнодѣйствующей относительно осей Ox, Oy и Oz, при чемъ получимъ:

$$\left.\begin{aligned} M(R)_{Ox} &= Zy - Yz \\ M(R)_{Oy} &= Xz - Zx \\ M(R)_{Oz} &= Yx - Xy \end{aligned}\right\} \qquad (136)$$

Здѣсь X, Y, Z суть проекціи равнодѣйствующей на соотвѣтствующія оси или, что то же, суммы проекцій силъ составляющихъ на тѣ же оси (такъ какъ проекція равнодѣйствующей равна суммѣ проекцій составляющихъ на произвольную ось)

Въ частномъ случаѣ, если бы всѣ силы, дѣйствующія на данную точку, лежали въ одной плоскости напр. въ плоскости xOy то мы имѣли бы, очевидно (фиг. 166):

$$Z = 0 \text{ и } z = 0,$$

а потому вмѣсто трехъ равенствъ (136) получили бы только одно выражающее моментъ силы R относительно точки O

$$M(R)_0 = Yx - Xy. \qquad (137)$$

Въ § 190 было доказано, что моментъ всякой силы относительно точки (начала координатъ) равенъ геометрической суммѣ моментовъ той же силы относительно трехъ прямоугольныхъ осей проходящихъ черезъ эту точку, т. е.:

$$\overline{M(F)_0} = \overline{M(F)_{Ox}} + \overline{M(F)_{Oy}} + \overline{M(F)_{Oz}}.$$

Вводя вмѣсто символическихъ обозначеній моментовъ ихъ величины изъ выраженій (136), получимъ:

$$\overline{M(F)_0} = \overline{(Zy - Yz)} + \overline{(Xz - Zx)} + \overline{(Yx - Xy)} \qquad (138)$$

Если намъ будетъ задана нѣкоторая сила F своими проекціями X, Y и Z на три оси Ox, Oy и Oz, при чемъ координаты x, y, z опредѣляютъ точку приложенія силы, мы, пользуясь послѣднимъ выраженіемъ, будемъ въ состояніи вычислить моментъ этой силы относительно начала координатъ. Моменты силъ относительно осей могутъ быть представлены линейно посредствомъ векторовъ, отложенныхъ по этимъ осямъ (§ 186); въ такомъ случаѣ и моментъ силы относительно начала представится векторомъ, величина котораго непосредственно опредѣляется выраженіемъ (138). Что же касается направленія его, то косинусы угловъ, составляемыхъ имъ съ каждой изъ осей будутъ соотвѣтственно равны:

$$\cos(F, Ox) = \frac{Zy - Yz}{M(F)_0},$$

$$\cos(F, Oy) = \frac{Xz - Zx}{M(F)_0},$$

$$\cos(F, Oz) = \frac{Yx - Xy}{M(F)_0}.$$

Замѣтимъ кстати, что моментъ силы (какъ и всякаго вектора) относительно точки только въ томъ случаѣ будетъ равенъ нулю, когда всѣ три момента относительно каждой изъ осей въ отдѣльности равны нулю.

II Динамика системъ точекъ

ГЛАВА XX.

Основныя опредѣленія

§ 196. Понятіе о системѣ матерьяльныхъ точекъ.

Подъ именемъ системы матерьяльныхъ точекъ подразумѣваютъ такую совокупность подобныхъ точекъ, которыя оказываютъ взаимное вліяніе на движеніе другъ друга, благодаря связямъ (силамъ взаимодѣйствія), существующимъ между ними. Отсюда заключаемъ, что отдѣльныя точки системы суть точки несвободныя (связь съ другими точками). Въ динамикѣ несвободной точки было указано, что подобныя точки можно разсматривать какъ точки свободныя, если только замѣнить связи ихъ съ другими точками соотвѣтственными силами, послѣ чего при наличности всѣхъ необходимыхъ данныхъ касающихся дѣйствія силъ на точку, не трудно будетъ найти движеніе послѣдней или наоборотъ по движенію ея найти силы. Если мы опредѣлимъ такимъ образомъ движеніе всѣхъ матерьяльныхъ точекъ, составляющихъ данную систему мы тѣмъ самымъ опредѣлимъ движеніе всей системы.

§ 197. Силы внутреннія и внѣшнія.

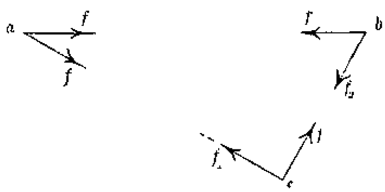
Силы, дѣйствію которыхъ подвержена всякая матерьяльная точка той или другой системы, какъ и всѣ силы природы, обязаны своимъ происхожденіемъ присутствію матерьяльныхъ точекъ или тѣлъ, окружающихъ данную точку. Въ зависимости отъ того, входятъ ли эти точки въ составъ разсматриваемой въ каждомъ частномъ случаѣ системы или ей не принадлежатъ, всѣ силы, приложенныя къ данной точкѣ, могутъ быть раздѣлены на два вида силы внутреннія, имѣющія источникомъ своимъ точки системы, и силы внѣшнія, происходящія отъ точекъ, не входящихъ въ составъ системы, движеніе которой мы изучаемъ. По началу противодѣйствія какъ тѣ такъ и другія точки въ свою очередь подвергаются дѣйствію со стороны данной точки системы; такимъ образомъ между силами внутренними и внѣшними по сущности дѣйствія ихъ не имѣется какой либо разницы. Тѣмъ не менѣе при изученіи движенія системъ матерьяльныхъ точекъ или физическихъ тѣлъ оба рода силъ разсматриваютъ обыкновенно въ отдѣльности, благодаря чему часто представляется возможнымъ внести извѣстныя упрощенія въ выводы какъ то мы увидимъ ниже.

Для того чтобы указать на различіе, которое существуетъ между силами внутренними и внѣшними въ томъ случаѣ, когда мы изслѣдуемъ движеніе системы точекъ, разсмотримъ слѣдующій примѣръ. Представимъ себѣ, что мы имѣемъ три матерьяльныхъ точки a, b и c (фиг. 167), которыя притягиваютъ другъ друга силами, указанными на фигурѣ, причемъ по началу противодѣйствія

$$f = f'$$

$$f_1 = f_1'$$

$$f_2 = f_2'$$



167.

Допустимъ кромѣ того, что никакія другія силы на эти точки не дѣйствуютъ.

Если мы будемъ изучать только движеніе одной матерьяльной точки a, то должны будемъ принять при этомъ во вниманіе только силы f' и f_1, приложенныя къ этой точкѣ, являющіяся результатомъ дѣйствія точекъ b и c. Силы f и f_1, съ которыми точка a дѣйствуетъ на b и c, мы, очевидно, разсматривать не будемъ такъ какъ интересуемся только движеніемъ точки a.

Если бы наша система состояла изъ двухъ точекъ a и b, то къ ней были бы приложены всего четыре силы: f, f', f_1' и f_2'. Первыя двѣ есть результатъ взаимодѣйствія между точками разсматриваемой нами теперь системы, т. е. силы внутреннія; силы же f_1 и f_2 являющіяся слѣдствіемъ взаимодѣйствія между точками системы и внѣшней точкой c, суть силы внѣшнія. Каждая изъ внѣшнихъ силъ имѣетъ соотвѣтственную парную силу, но только послѣдняя приложена не ко взятой системѣ, а къ посторонней точкѣ, а потому въ разсмотрѣніе не входитъ. Но если наша система будетъ состоять изъ трехъ точекъ a, b, c, то къ прежнимъ силамъ, дѣйствующимъ на точки системы, прибавятся силы f_1' и f_2', причемъ система будетъ подвержена только дѣйствію внутреннихъ силъ.

Только что изложенное можетъ быть распространено на какую угодно систему точекъ.

Такимъ образомъ различіе между внутренними и внѣшними силами проистекаетъ исключительно вслѣдствіе того, что мы разсматриваемъ силы приложенныя къ данной системѣ; съ измѣненіемъ же числа точекъ, составляющихъ систему или тѣло, какъ мы только что видѣли, нѣкоторыя изъ внѣшнихъ силъ обращаются во внутреннія и наоборотъ.

Такъ напр., если мы разсматриваемъ движеніе куска дерева, плавающаго въ сосудѣ, стоящемъ на столѣ, то внѣшними силами по отношенію къ дереву будутъ: вѣсъ его и давленіе воды, направленное вверхъ, давленіе же дерева на воду, а также давленіе сосуда на столъ и обратное ему совсѣмъ не входятъ въ разсмотрѣніе. Если затѣмъ мы будемъ разсматривать систему, въ составъ которой входитъ сосудъ съ наполняющей его водой и плавающимъ кускомъ дерева, то давленіе воды на дерево будетъ уже силой внутренней точно такъ же, какъ будетъ внутренней силой и обратное давленіе дерева на воду, не входившее ранѣе въ число разсматриваемыхъ силъ, внѣшними силами будутъ: вѣсъ сосуда со всѣмъ находящимся въ немъ и давленіе стола на сосудъ (реакція опоры).

Подобнымъ же образомъ не трудно каждый разъ опредѣлить силы, дѣйствующія въ той или другой системѣ, и указать, какія изъ нихъ будутъ внутренними, какія внѣшними.

Итакъ между двумя точками или тѣлами силы всегда парны. Если обѣ силы будутъ приложены къ точкамъ, входящимъ въ составъ разсматриваемой системы, то онѣ будутъ силами внутренними; если одна изъ точекъ не принадлежитъ данной системѣ, то сила, приложенная къ другой точкѣ (къ точкѣ системы) будетъ силою внѣшнею.

Внѣшнія силы, дѣйствующія на тѣла, могутъ быть раздѣлены на два вида: однѣ изъ нихъ дѣйствуютъ только на нѣкоторыя точки тѣла, таково напр. давленіе одного тѣла на другое, приложенное въ точкахъ поверхности соприкосновенія между тѣлами. Если поверхность эта достаточна мала, то мы можемъ принять ее за точку, которая и будетъ тогда точкою приложенія силы давленія между тѣлами. Силы другого рода дѣйствуютъ на всѣ точки системы таковы напр. сила тяжести, силы электрическія и магнитныя.

Выведемъ теперь нѣкоторыя положенія касающіяся внутреннихъ силъ.

§ 198. Сумма проекцій внутреннихъ силъ на произвольное направленіе. Такъ какъ внутреннія силы, дѣйствующія въ какой бы то ни было системѣ точекъ между каждой парой ихъ суть силы взаимныя, т. е. равныя по величинѣ и противоположныя по направленію, то сумма проекцій каждой пары силъ на любую ось будетъ равна нулю и слѣдовательно, сумма проекцій всѣхъ внутреннихъ силъ въ данной системѣ на любую ось также будетъ равна нулю.

Суммируя всѣ внутреннія силы, дѣйствующія на данную точку, и обозначая равнодѣйствующую ихъ черезъ R_i, можемъ написать:

$$\sum_{1}^{n} R_i \cos(R_i, l) =$$

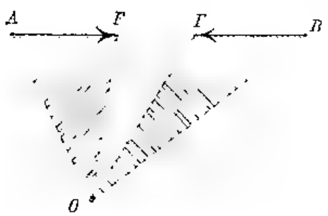
гдѣ n — обозначаетъ число точекъ разсматриваемой системы.

Отсюда дѣлаемъ заключеніе, если потребуется найти сумму проекцій всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на данную систему точекъ, то при такомъ суммированіи можно принять во вниманіе только силы внѣшнія, такъ какъ сумма проекцій внутреннихъ силъ, по только что изложенному, будетъ всегда нулемъ (подразумѣвается для одного и того же мгновенія).

Помимо извѣстнаго упрощенія, вносимаго этимъ положеніемъ, оно весьма важно еще потому, что въ указанномъ случаѣ намъ нѣтъ необходимости совсѣмъ знать распредѣленіе внутреннихъ силъ въ системѣ, а такъ какъ изученіе внутреннихъ силъ съ физической точки зрѣнія, вообще говоря, представляетъ значительныя, часто непреодолимыя трудности, при чемъ обыкновенно довольствуются лишь гипотезами о дѣйствіи ихъ, то отсюда понятно, насколько для успѣха дѣла въ извѣстныхъ случаяхъ полезно избавиться отъ разсмотрѣнія такого фактора.

§ 199. Сумма моментовъ внутреннихъ силъ.

Внутреннія силы всегда парны (фиг. 168); поэтому моменты ихъ относительно какой-либо точки O, будучи пропорціональны площадямъ треугольниковъ OAF_1 и OBF_2, равновеликихъ между собою, будутъ также между собою равны, но обратны по знаку, т. е. $M(F_1) = -M(F_2)$. Слѣдовательно, сумма двухъ такихъ моментовъ будетъ всегда равна нулю.



168

То же самое найдемъ и въ отношеніи суммы моментовъ внутреннихъ силъ всего тѣла. Изложенное по поводу суммы моментовъ относительно точки будетъ примѣнимо и къ суммѣ моментовъ относительно оси, такъ какъ проекціи парныхъ силъ на какую-либо плоскость будутъ между собою по величинѣ равны. Итакъ находимъ: **сумма моментовъ внутреннихъ силъ всякой системы точекъ относительно произвольной оси равна нулю.**

Такимъ образомъ при нахожденіи суммы моментовъ всѣхъ силъ, приложенныхъ къ какой-либо системѣ матерьяльныхъ точекъ, относительно произвольной оси (или точки, если всѣ — внутреннія и внѣшнія — силы лежатъ въ одной плоскости), достаточно опредѣлить только сумму моментовъ внѣшнихъ силъ; сумму же моментовъ силъ внутреннихъ нѣтъ необходимости вычислять, такъ какъ она всегда равна нулю.

§ 200. Различные виды системъ матерьяльныхъ точекъ.

Въ нижеслѣдующемъ изложеніи динамики системъ матерьяльныхъ точекъ мы не будемъ въ общемъ случаѣ вводить какія-либо ограниченія относительно свойствъ разсматриваемыхъ системъ, имѣя въ качествѣ основныхъ данныхъ лишь то, что внутреннія силы въ немъ дѣйствующія, удовлетворяютъ началу противодѣйствія, а слѣдовательно, будутъ имѣть мѣсто приведенныя выше теоремы (§§ 198 и 199) о суммѣ проекцій и суммѣ моментовъ внутреннихъ силъ.

Кромѣ такой системы матерьяльныхъ точекъ или такого рода тѣлъ укажемъ еще на слѣдующія:

1) Неизмѣняемая система точекъ или абсолютно твердое тѣло, опредѣленіе котораго было дано выше (§ 113).

2) Абсолютно упругое тѣло, обладающее свойствомъ по прекращеніи дѣйствія приложенныхъ къ тѣлу силъ возстановлять вполнѣ свою первоначальную форму. Твердыя тѣла, встрѣчающіяся въ природѣ, не представляются ни абсолютно твердыми, ни обладающими совершенной упругостью, различныя тѣла въ различной мѣрѣ обладаютъ свойствами того или другого вида тѣлъ.

3) Совершенная капельная жидкость характеризуется, во-первыхъ, абсолютной несжимаемостью, а во-вторыхъ, способностью оказывать сопротивленіе только силамъ сжимающимъ, но не разрывающимъ ее и не разсдвигающимъ. Сверхъ того при движеніи совершенной жидкости не существуетъ сопротивленій внутри ея. Равновѣсіе и движеніе жидкостей изучается въ гидромеханикѣ (гидростатикѣ и гидродинамикѣ, вѣрнѣе — гидрокинетикѣ), представляющей примѣненіе выводовъ общей механики къ этому частному случаю.

Жидкія тѣла природы также не представляютъ собою совершенныхъ жидкостей.

4) Совершенный газъ, подчиняющійся законамъ Марріотта и Ге-Люссака. Равновѣсіе и движеніе совершенныхъ газовъ изучаются въ аэромеханикѣ.

Механика упругихъ тѣлъ, гидромеханика и аэромеханика составляютъ спеціальные отдѣлы теоретической механики и въ наше разсмотрѣніе не войдутъ. Мы же остановимся, какъ указывалось, на разсмотрѣніи общихъ началъ механики, относящихся безразлично къ какимъ угодно системамъ матерьяльныхъ точекъ, при чемъ выведемъ законы движенія этихъ тѣлъ; а затѣмъ попутно сдѣлаемъ примѣненіе найденныхъ законовъ къ неизмѣняемой системѣ матерьяльныхъ точекъ или твердому тѣлу.

ГЛАВА XXXI

Законъ движенія центра инерціи

§ 201. Центръ инерціи тѣла

Пусть будетъ дано тѣло или система, состоящая изъ матерьяльныхъ точекъ, имѣющихъ массы

$$m',\ m'',\ m'''$$

При этомъ

$$m' + m'' + m''' + \ldots = \sum_{1}^{n} m = \mu$$

представитъ массу всего тѣла. Отнесемъ это тѣло къ тремъ прямоугольнымъ осямъ координатъ (фиг. 169), при чемъ координаты точекъ будутъ соотвѣтственно:

169.

$$m' \quad x',\ y',\ z',$$

$$m'' \quad x'',\ y'',\ z'',$$

$$m''' \quad x''',\ y''',\ z'''$$

Составимъ для каждой оси отдѣльно суммы произведеній массъ на соотвѣтственныя координаты или такъ называемые моменты массъ относительно плоскости*)

$$m'x' + m''x'' + m'''x''' + \ldots = \sum_{1}^{n} mx,$$

$$m'y' + m''y'' + m'''y''' + \ldots = \sum my,$$

$$m'z' + m''z'' + m'''z''' + \ldots = \sum mz.$$

*) Моментомъ массы относительно плоскости называется произведеніе изъ массы на перпендикуляръ, опущенный изъ точки, которой принадлежитъ масса, на плоскость

Въ дальнѣйшемъ значки 1 и n у знака суммы будемъ опускать, помня, что суммированіе совершается по всѣмъ точкамъ системы.

Всегда можемъ положить.

$$\left.\begin{aligned}\sum mx &= \mu\xi\\ \sum my &= \mu\eta\\ \sum mz &= \mu\zeta\end{aligned}\right\}\qquad(139)$$

гдѣ ξ (кси), η (эта) и ζ (дзета) суть координаты нѣкоторой точки, опредѣляемые тремя послѣдними уравненіями. Изъ нихъ находимъ.

$$\xi = \frac{\Sigma mx}{\mu}, \quad \eta = \frac{\Sigma my}{\mu}, \quad \zeta = \frac{\Sigma mz}{\mu} \qquad (140)$$

Такую точку и называютъ центромъ массы или центромъ инерціи тѣла. Такъ какъ положеніе всякой точки въ пространствѣ опредѣляется тремя координатами (не болѣе и не менѣе) и такъ какъ для опредѣленія положенія центра инерціи мы имѣемъ три уравненія (139 или 140), то, рѣшивъ ихъ, мы и найдемъ только одну опредѣленную точку—центръ инерціи.

Если данная система точекъ представляетъ собою твердое тѣло то вслѣдствіе того, что разстоянія между точками ея не измѣняются центръ инерціи въ такомъ тѣлѣ будетъ также занимать опредѣленное постоянное положеніе относительно другихъ точекъ тѣла. Наименованіе разсматриваемой точки «центромъ массы» непосредственно слѣдуетъ изъ тѣхъ выраженій, которыя ее опредѣляютъ; не менѣе подходитъ и названіе «центръ инерціи», такъ какъ свойство инерціи принадлежитъ массѣ. Очевидно, каждому положенію данныхъ массъ будетъ соотвѣтствовать свой центръ инерціи; послѣдній будетъ измѣнять свое положеніе вмѣстѣ съ перемѣщеніями, происходящими въ тѣлѣ.

Напомнимъ, что мы разсматриваемъ не твердое тѣло а произвольную систему массъ, какое угодно тѣло постоянно измѣняющее свое строеніе и форму.

Выведенныя выраженія (140) могутъ быть примѣнены не только къ опредѣленію центра инерціи системы матерьяльныхъ точекъ, но и къ опредѣленію центра инерціи отдѣльныхъ частей тѣла и отдѣльныхъ тѣлъ, при чемъ въ этомъ случаѣ x', y', z; x'', y'', z''; ... будутъ изображать координаты центровъ массъ частей тѣла или отдѣльныхъ тѣлъ.

§ 202. Центръ тяжести тѣла.

Центръ инерціи называютъ также центромъ тяжести тѣла на основаніи слѣдующихъ соображеній: допустимъ что размѣры разсматриваемаго тѣла настолько невелики, что измѣненіемъ силы тяжести въ предѣлахъ его можно пренебречь и, слѣдовательно, считать ускореніе этой силы g постояннымъ. Умножимъ обѣ части выраженій (139) на g, тогда получимъ:

$$\left.\begin{aligned} g\sum mx = \sum mg \cdot x &= \mu g \cdot \xi \\ g\sum my = \sum mg \cdot y &= \mu g \cdot \eta \\ g\sum mz = \sum mg \cdot z &= \mu g \cdot \zeta \end{aligned}\right\} \tag{141}$$

Но въ этихъ равенствахъ произведенія mg представляютъ собою вѣса отдѣльныхъ точекъ ($m'g$, $m''g$, $m'''g \ldots$); обозначимъ ихъ черезъ p (p', p'', p''', ...). Произведеніе же μg выражаетъ вѣсъ тѣла P. Вводя эти обозначенія въ (167) находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \sum px &= P \cdot \xi \\ \sum py &= P \cdot \eta \\ \sum pz &= P \cdot \zeta \end{aligned}\right\} \tag{142}$$

Эти равенства совершенно аналогичны равенствамъ (139) съ той лишь разницей, что здѣсь вмѣсто массъ входятъ вѣса отдѣльныхъ точекъ и вѣсъ тѣла. Поэтому точку, координаты которой суть

$$\xi = \frac{\Sigma px}{P} \qquad \eta = \frac{\Sigma py}{P} \qquad \zeta = \frac{\Sigma pz}{P}$$

вполнѣ умѣстно назвать **центромъ тяжести** тѣла. Координаты ея очевидно тѣ же, что и координаты центра инерціи; такъ напр

$$\xi = \frac{\Sigma px}{P} = \frac{\Sigma mg \cdot x}{\mu g} = \frac{g \Sigma mx}{\mu g} = \frac{\Sigma mx}{\mu}$$

т. е. центръ тяжести и центръ инерціи между собою совпадаютъ. Поэтому вмѣсто «центръ инерціи» можно употреблять названіе «центръ тяжести». Но слѣдуетъ помнить, что такое совпаденіе имѣетъ мѣсто только въ томъ случаѣ, если ускореніе силы тяжести g для всѣхъ точекъ тѣла принимается постояннымъ (для даннаго мгновенія).

Такъ какъ въ неизмѣняемой системѣ или въ твердомъ тѣлѣ центръ инерціи его есть постоянная точка, то то же самое можетъ быть сказано и о центрѣ тяжести.

Переходимъ теперь къ выводу закона движенія центра инерціи или центра тяжести.

§ 203. Законъ движенія центра инерціи.

Пусть будутъ даны: 1) тѣло, состоящее изъ матерьяльныхъ точекъ, массы которыхъ таковы

$$m', m'', m''', \ldots m^{(n)}$$

и 2) координаты этихъ точекъ какъ функціи времени т. е.

$$x' = f'(t); \quad x'' = f''(t); \ldots$$
$$y' = \varphi'(t); \quad y'' = \varphi''(t); \ldots$$
$$z' = \psi'(t); \quad z'' = \psi''(t); \ldots$$

Координаты центра тяжести — ξ, η, ζ выражаются въ зависимости отъ координатъ отдѣльныхъ точекъ разсматриваемаго тѣла, какъ только что найдено слѣдующими уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} \mu\xi &= \sum mx \\ \mu\eta &= \sum my \\ \mu\zeta &= \sum mz \end{aligned}\right\} \qquad (143)$$

гдѣ $\mu = m' + m'' + m''' + \ldots = \sum m$ есть масса всего тѣла. Координаты ξ, η, ζ, подобно координатамъ точекъ тѣла, будутъ также функціями времени, т. е.

$$\xi = \frac{\sum mx}{\mu} = f_1(t)$$

$$\eta = \frac{\sum my}{\mu} = f_2(t)$$

$$\zeta = \frac{\sum mz}{\mu} = f_3(t)$$

Координаты эти, какъ и всякія другія опредѣляютъ съ одной стороны положеніе, занимаемое центромъ инерціи въ пространствѣ, а съ другой — выражаютъ проекцію разстоянія центра инерціи на каждую изъ осей.

Дадимъ промежутку времени t элементарное приращеніе Δt; при этомъ получатъ соотвѣтственныя приращенія и координаты точекъ и центра инерціи, какъ функціи t. Мы будемъ имѣть для оси x:

$$\mu(\xi + \Delta\xi) = m'(x' + \Delta x') + m''(x'' + \Delta x'') + m'''(x''' + \Delta x''') + \ldots =$$
$$= \sum m(x + \Delta x)$$

Вычитая соотвѣтственно изъ частей этого выраженія части слѣдующаго

$$\mu\xi = m'x' + m''x'' + m'''x''' + \ldots = \sum mx,$$

найдемъ

$$\mu\Delta\xi = m\Delta x + m'\Delta x' + m''\Delta x'' + \ldots = \sum m\Delta x.$$

Дѣля каждый изъ членовъ на Δt и беря предѣлы всѣхъ частей, получимъ

$$\text{пр.}\ \frac{\mu\Delta\xi}{\Delta t} = \text{пр.}\ \frac{m'\Delta x'}{\Delta t} + \text{пр.}\ \frac{m''\Delta x''}{\Delta t} + \ldots =$$

$$= \text{пр.} \sum \frac{m\Delta x}{\Delta t} = \sum \text{пр.}\ \frac{m\Delta x}{\Delta t}.$$

Здѣсь значенія массъ, какъ числа постоянныя можно вынести за знаки предѣловъ, подъ знаками которыхъ останутся выраженія, подобныя

$$\text{пр.}\ \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

это же есть ни что иное, какъ проекція скорости соотвѣтственной точки на ось x, а именно:

$$\text{пр.}\ \frac{\Delta x}{\Delta t} = v_x,$$

а потому

$$\mu V_x = m'v_x' + m''v_x'' + m'''v_x''' + \ldots = \sum mv_x.$$

То же самое найдемъ и для осей Oy и Oz, т. е. будемъ имѣть для всѣхъ трехъ осей:

$$\left.\begin{aligned} \mu V_x &= \sum mv_x \\ \mu V_y &= \sum mv_y \\ \mu V_z &= \sum mv_z \end{aligned}\right\} \qquad (144)$$

Поступая съ каждымъ изъ этихъ выраженій подобно только что изложенному относительно выраженій (143), т. е. давая приращеніе времени t и находя приращеніе скорости (функціи времени), беря затѣмъ предѣлъ отношенія приращенія скорости ко времени, мы найдемъ слѣдующія зависимости между проекціями ускоренія центра инерціи и проекціями ускореній матерьяльныхъ точекъ системы:

$$\left.\begin{aligned} \mu W_x &= \sum mw_x \\ \mu W_y &= \sum mw_y \\ \mu W_z &= \sum mw_z \end{aligned}\right\} \qquad (145)$$

Переходя теперь къ зависимости между ускореніемъ каждой точки и дѣйствующими на точку силами, замѣтимъ, что каждая изъ точекъ тѣла благодаря вліяніямъ со стороны другихъ точекъ, является точкой не свободной. Но стоитъ намъ всѣ эти вліянія или связи съ другими точками замѣнить приличнымъ образомъ подобранными силами, вообразить силы эти приложенными къ данной точкѣ, и мы тогда можемъ разсматривать послѣднюю какъ точку свободную; а въ такомъ случаѣ къ ней будетъ приложимо основное уравненіе кинетики свободной точки, а именно,

$$R = mw,$$

гдѣ R — равнодѣйствующая всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ, m — масса и w — ускореніе ея.

Въ примѣненіи къ тремъ осямъ координатъ выраженіе это получаетъ видъ:

$$X = mw_x,$$

$$Y = mw_y,$$

$$Z = mw_z,$$

гдѣ X, Y, Z — суть проекціи равнодѣйствующей или, что то же, суммы проекцій всѣхъ силъ, къ точкѣ приложенныхъ, на оси Ox, Oy и Oz.

На каждую изъ точекъ системы дѣйствуютъ во-первыхъ внѣшнія силы и, во-вторыхъ, силы внутреннія.

Обозначимъ сумму проекцій внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на нѣкоторую точку m, по направленію каждой изъ трехъ осей через X_e, Y_e, Z_e, и внутреннихъ силъ черезъ X_i, Y_i, Z_i. Тогда имѣемъ:

$$X_e + X_i = mw_x,$$

$$Y_e + Y_i = mw_y,$$

$$Z_e + Z_i = mw_z$$

Замѣтимъ при этомъ, что внѣшнія силы могутъ дѣйствовать не на всѣ, а только на нѣкоторыя точки системы, слѣдовательно, въ частномъ случаѣ X_e, Y_e, Z_e могутъ быть равны нулю.

Подобныя выраженія напишемъ для всѣхъ точекъ системы:

$$X_e' + X_i' = m' w_x'; \quad Y_e' + Y_i' = m' w_y', \quad Z_e' + Z_i' = m' w_z'$$

$$X_e'' + X_i'' = m'' w_x''; \quad Y_e'' + Y_i'' = m'' w_y''; \quad Z_e'' + Z_i'' = m'' w_z'';$$

$$X_e''' + X_i''' = m''' w_x'''; \quad Y_e''' + Y_i''' = m''' w_y'''; \quad Z_e''' + Z_i''' = m''' w_z''';$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

Складывая соотвѣтственныя части ихъ между собою, получимъ

$$\left.\begin{array}{l} \sum X_e + \sum X_i = \sum mw_x \\ \sum Y_e + \sum Y_i = \sum mw_y \\ \sum Z_e + \sum Z_i = \sum mw_z \end{array}\right\} \qquad 140)$$

при чемъ суммированіе производится по всѣмъ точкамъ (n) системы.

Разсмотримъ первое изъ этихъ равенствъ. Первый членъ его представляетъ сумму проекцій на ось Ox всѣхъ внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ разсматриваемому тѣлу. Второй членъ заключаетъ сумму проекцій всѣхъ внутреннихъ силъ. Но какъ было доказано выше (§ 196), сумма эта всегда равна нулю, т. е.

$$\sum X_i = 0$$

Вторыя части равенствъ (146), какъ было найдено (145), равны соотвѣтственно:

$$\mu W_x, \quad \mu W_y, \quad \mu W_z.$$

А потому имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \sum X_e &= \mu W_x \\ \sum Y_e &= \mu W_y \\ \sum Z_e &= \mu W_z \end{aligned}\right\} \qquad (147)$$

Суммированіе въ первыхъ частяхъ уравненій здѣсь производится также по всѣмъ точкамъ системы; но такъ какъ внѣшнія силы могутъ быть приложены не ко всѣмъ точкамъ, то раціональнѣе произвести суммированіе по всѣмъ силамъ данной системы.

Легко усмотрѣть, что послѣднія уравненія представляютъ собою ничто иное, какъ уравненія движенія свободной матерьяльной точки, масса которой равна массѣ всего тѣла (μ) и на которую дѣйствуютъ всѣ внѣшнія силы, приложенныя къ данному тѣлу. При этихъ условіяхъ точка эта имѣетъ то же самое ускореніе, что и центръ инерціи даннаго тѣла и обратно. Такимъ образомъ **центръ инерціи всякаго тѣла движется такъ, какъ двигалась бы матерьяльная точка, масса которой равна массѣ всего тѣла и къ которой приложены всѣ внѣшнія силы, дѣйствующія на данное тѣло.** Внѣшнія силы при этомъ нужно представить перенесенными паралельно самимъ себѣ въ центръ инерціи.

Въ изложенномъ и состоитъ **законъ движенія центра инерціи или центра массы системы точекъ.**

Внутреннія силы въ написанныя выше выраженія не входятъ, такъ какъ сумма проекцій ихъ на любую ось равна нулю. Такимъ образомъ *онѣ не могутъ оказать какое бы то ни было вліяніе на движеніе центра инерціи, т. е. измѣнить его скорость.*

§ 204. Законъ сохраненія движенія центра инерціи.

Разсмотримъ случай, когда суммы проекцій всѣхъ внѣшнихъ силъ на три прямоугольныя оси равны нулю, а именно:

$$\left.\begin{aligned} \sum X_e &= 0 \\ \sum Y_e &= 0 \\ \sum Z_e &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (148)$$

Условіе это будетъ имѣть мѣсто также въ томъ частномъ случаѣ, когда на тѣло совсѣмъ не дѣйствуютъ внѣшнія силы, т. е. когда тѣло подвержено лишь дѣйствію силъ внутреннихъ, неспособныхъ, какъ намъ хорошо извѣстно, измѣнить состояніе центра инерціи.

На основаніи выраженій (147) будемъ имѣть

$$\mu W_x = 0,\quad \mu W_y = 0,\quad \mu W_z = 0$$

Но такъ какъ μ всегда больше нуля, то

$$W_x = 0,\quad W_y = 0,\quad W_z = 0$$

и слѣдовательно

$$\overline{W} = \overline{W_x} + \overline{W_y} + \overline{W_z} = 0$$

т. е. ускореніе центра инерціи равно нулю. Это указываетъ на то, что скорость его остается постоянной, а именно

$$V = Const,$$

другими словами, состояніе центра инерціи не мѣняется, онъ движется равномѣрно и прямолинейно или въ частномъ случаѣ, если $V = 0$, находится въ покоѣ. Такимъ образомъ, *если сумма проекцій всѣхъ внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ данному тѣлу на каждую изъ трехъ взаимноперпендикулярныхъ осей, равна нулю, то центръ инерціи его сохраняетъ свое состояніе.*

Въ этомъ и заключается *законъ сохраненія состоянія центра инерціи.*

Если напр. центръ инерціи находится въ покоѣ и мы затѣмъ приложимъ къ нему систему силъ, удовлетворяющихъ условіямъ (148), то различныя точки тѣла будутъ при этомъ вообще говоря, подъ дѣйствіемъ какъ приложенныхъ внѣшнихъ, такъ и внутреннихъ силъ перемѣщаться соотвѣтствующимъ образомъ, центръ же инерціи будетъ всегда покоиться.

§ 205. Примѣры сохраненія движенія центра инерціи.

Если центръ инерціи какой либо системы точекъ находится въ покоѣ или обладаетъ постоянною скоростью, то въ отсутствіи внѣшнихъ силъ, онъ всегда будетъ оставаться въ этомъ состояніи, какъ бы ни дѣйствовали внутреннія силы.

Во всей вселенной существуютъ только внутреннія силы между отдѣльными тѣлами, входящими въ составъ ея, поэтому центръ тяжести ея покоится или находится въ вѣчномъ движеніи съ постоянной (по величинѣ и направленію) скоростью.

При разрывѣ гранаты движеніе центра тяжести ея не измѣняется, такъ какъ при дѣйствіи разрывного заряда появляются только внутреннія силы.

При выстрѣлѣ орудіе необходимо должно откатиться назадъ, такъ какъ дѣйствіе пороховыхъ газовъ есть сила внутренняя, снарядъ же перемѣщается впередъ; чтобы центръ тяжести системы (орудія со снарядомъ) остался въ покоѣ, ей приходится двинуться въ обратную сторону, она и придетъ въ соотвѣтствующее движеніе если послѣднее не будетъ измѣнено дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ.

Въ дѣйствительности на всю систему (орудіе, лафетъ, снарядъ) дѣйствуютъ внѣшнія силы, такъ, снарядъ подвергается дѣйствію силы тяжести и сопротивленію воздуха; движеніе орудія съ лафетомъ замѣняется силою тренія. Вслѣдствіе этого центръ тяжести всей системы будетъ въ дѣйствительности измѣнять свое положеніе.

При ударѣ двухъ тѣлъ общій центръ тяжести ихъ продолжаетъ сохранять свое движеніе, такъ какъ силы, развивающіяся при ударѣ, суть силы внутреннія.

Выскакивая изъ стоящей у берега лодки, мы непремѣнно заставимъ ее оттолкнуться отъ берега, такъ какъ общій центръ тяжести лодки и нашего тѣла долженъ остаться въ покоѣ. Но какое бы давленіе мы ни производили на лодку, оставаясь въ покоѣ, лодка не измѣнитъ своего состоянія, такъ какъ при такомъ давленіи не произойдетъ перемѣщенія массъ.

Нѣкоторыя явленія повидимому противорѣчатъ только что доказанному закону *): «Такъ напр. извѣстно, что мы, напрягая достаточное мускульное усиліе, т. е. развивая внутреннія силы, можемъ передвинуть наше тѣло, а слѣдовательно и его центръ тяжести. Противорѣчіе здѣсь представляющееся, только видимое, оно происходитъ отъ невѣрнаго предположенія, что при нашемъ передвиженіи приходятъ въ дѣйствіе только однѣ внутреннія силы, между тѣмъ какъ опора, на которой мы стоимъ, оказываетъ на наше тѣло извѣстное усиліе; это послѣднее есть сила внѣшняя относительно нашего тѣла, она и производитъ движеніе его центра тяжести. Когда мы идемъ по горизонтальному направленію, то мускулами, оканчивающимися въ подошвѣ, производимъ на полъ наклонное давленіе спереди назадъ. По началу противодѣйствія полъ оказываетъ точно такое же давленіе, но сзади впередъ; это давленіе можно разсматривать состоящимъ изъ двухъ: изъ нихъ одно вертикальное, которое или равно вѣсу нашего тѣла (въ такомъ случаѣ центръ нашего тѣла не опускается и не подымается), или больше его (тогда центръ поднимается мы подпрыгиваемъ), или меньше его (тогда центръ тяжести опускается, мы присѣдаемъ), а другое — горизонтальное; это то послѣднее давленіе и подвигаетъ нашъ центръ тяжести по горизонтальному направленію Чѣмъ больше это давленіе, тѣмъ быстрѣе мы можемъ со

*) И. Вышнеградскій Элементарная механика 1860 стр 228.

общить значительную скорость нашему тѣлу, чѣмъ меньше это давленіе, тѣмъ больше нужно времени, чтобы ему сообщить ту же скорость. Но вообще замѣчено, что если два прикасающихся между собою тѣла находятся во взаимодѣйствіи, то его слагающая паралельная плоскости прикосновенія, завися отъ физическихъ свойствъ касающихся тѣлъ, можетъ быть вообще тѣмъ больше, чѣмъ больше слагающая, перпендикулярная къ этой плоскости, и чѣмъ шероховатѣе прикасающіяся поверхности, поэтому, чѣмъ глаже полъ, тѣмъ большее давленіе по вертикальному направленію мы должны на него производить для того, чтобы двигать наше тѣло. Если бы мы, надѣвъ сапоги со стальными, хорошо полированными подошвами, пошли по такому же полу, то каждый шагъ стоилъ бы намъ чрезвычайныхъ усилій. Когда мы стали бы заносить одну ногу впередъ, то другая должна бы была подвигаться назадъ, и встрѣчая малое сопротивленіе со стороны пола, дѣйствительно пошла бы взадъ и мы рисковали бы поскользнуться, упасть на каждомъ шагу. Всякій знаетъ что опытъ подтверждаетъ вполнѣ это заключеніе».

§ 206. Законъ сохраненія движенія центра инерціи въ примѣненіи къ твердому тѣлу.

Положимъ, что разсматриваемое твердое тѣло находится въ покоѣ. Если внѣшнія силы, приложенныя къ нему, удовлетворяютъ для даннаго мгновенія условіямъ (148), то центръ инерціи взятаго тѣла будетъ продолжать пребывать въ покоѣ, а въ такомъ случаѣ единственно возможными движеніями для точекъ тѣла остаются такія, изъ которыхъ каждое можетъ быть приведено къ вращенію около мгновенной оси, общей для всего тѣла и проходящей черезъ центръ инерціи, при чемъ всѣ точки тѣла будутъ обладать одной и той же угловой скоростью вращенія (§ 115).

Если же при соблюденіи тѣхъ же условій (148) относительно внѣшнихъ силъ центръ инерціи твердаго тѣла находится въ прямолинейномъ и равномѣрномъ движеніи, то каждое изъ элементарныхъ перемѣщеній тѣла можетъ быть разложено на два составляющихъ перемѣщенія: поступательное съ одинаковой (и при томъ постоянной) скоростью для всего тѣла и вращательное около оси, общей для всѣхъ точекъ тѣла. Такимъ образомъ и въ этомъ случаѣ внѣшнія силы могутъ сообщить твердому тѣлу только вращеніе около центра инерціи.

§ 207. Движеніе тѣла подъ дѣйствіемъ силы тяжести.

Если тѣло подвержено только дѣйствію силы тяжести, то въ такомъ случаѣ ко всѣмъ точкамъ тѣла будутъ приложены паралельныя между собою силы, пропорціональныя массамъ точекъ; силы эти сообщатъ всѣмъ точкамъ одно и то же ускореніе g. Принимая осью Oz, совпадающей съ вертикалью и направленной внизъ, мы получимъ для проекцій ускоренія центра тяжести на оси координатъ Ox, Oy и Oz (147) соотвѣтственно

$$W_x = 0, \quad W_y = 0, \quad W_z = g,$$

а потому законъ движенія центра тяжести выразится уравненіемъ

$$P = \mu g, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{149}$$

гдѣ $P = \Sigma Z_e = \Sigma p$ равняется суммѣ вѣсовъ отдѣльныхъ точекъ тѣла, а μ — масса всего тѣла.

Если мы имѣемъ твердое тѣло, находящееся въ покоѣ, то подъ дѣйствіемъ силъ тяжести оно начнетъ перемѣщаться поступательно по вертикальному направленію.

Не трудно показать, что сумма работъ вѣсовъ отдѣльныхъ точекъ тѣла при произвольномъ перемѣщеніи его равна произведенію вѣса тѣла на пониженіе центра тяжести.

Пусть тѣло совершаетъ какое угодно перемѣщеніе; принимая ось Oz направленною сверху внизъ и обозначая начальныя координаты точекъ черезъ z_0, а конечныя черезъ z, получимъ, что сумма работъ вѣсовъ ихъ будетъ равна:

$$T = \sum p(z - z_0) = \sum pz - \sum pz_0.$$

Но

$$\sum pz = P\zeta,$$

$$\sum pz_0 = P\zeta_0,$$

слѣдовательно

$$T = \sum p(z - z_0) = P(\zeta - \zeta_0). \tag{150}$$

§ 208. Задачи

1. Опредѣлить движеніе центра инерціи системы, состоящей изъ двухъ точекъ, массы которыхъ соотвѣтственно равны $m' =$ [illegible], $m'' = 4$, подъ дѣйствіемъ слѣдующихъ силъ:

$$X_1 = 4, \quad X_2 = -3, \quad X_3 = [illegible]$$

$$Y = 6.$$

При приложеніи силъ (въ началѣ времени) центръ инерціи находится въ началѣ координатъ и имѣетъ скорость, опредѣляемую составляющими

$$V_{x_0} = 2, \quad V_{y_0} = V_{z_0} = 0.$$

2. Движеніе точекъ системы, массы которыхъ равны: $m' = 3$, $m'' =$ [illegible], опредѣляется соотвѣтственно уравненіями:

$$x' = 2t, \quad y' = 4t^2 - 2, \quad z' = 0$$

$$x'' = 0, \quad y'' = 6, \quad z'' = [illegible]$$

Найти: а) положеніе центра инерціи въ концѣ 2-ой секунды; б) скорость его въ это мгновеніе; в) суммы проекцій силъ на каждую изъ трехъ осей.

3. Рѣшить ту же задачу при данныхъ

$$m = 2,\quad x' = 1,\quad y' = 4,\quad z' = 6;$$

$$m = 2,\quad x'' = \ ,\quad y'' = 0,\quad z'' = 0$$

4. Движеніе центра инерціи опредѣляется уравненіями

$$x = 4t^2 - \ ,\quad y = 2t + 3,\quad z = 0$$

Найти суммы проекцій внѣшнихъ силъ, подъ дѣйствіемъ которыхъ совершается такое движеніе.

5. На тѣло дѣйствують силы, суммы проекцій которыхъ на оси координатъ таковы:

$$\sum X = 0,\quad \sum Y = \ \ 6t,\quad \sum Z = t - 2$$

Найти силы, при приложеніи которыхъ къ тѣлу центръ инерціи его будетъ сохранять свое состояніе.

6. Найти скорость (въ видѣ проекцій ея на оси координатъ), съ которой будетъ двигаться центръ инерціи тѣла послѣ приложенія къ послѣднему силъ, указанныхъ въ предыдущей задачѣ, если

$$V_x = \ ,\quad V_{y_0} = 1,\quad V_z = 0,\quad \mu = 2.$$

7. Къ центру инерціи твердаго тѣла съ массою равною 8 приложена постоянная сила $F = 4$. Найти его движеніе, если до приложенія силы тѣло покоилось.

8. Твердое тѣло состоитъ изъ двухъ точекъ, при чемъ масса каждой равна единицѣ. Къ одной изъ точекъ приложена постоянная сила $F = 2$. Найти движеніе центра инерціи, если тѣло до приложенія силы находилось въ покоѣ.

9. Рѣшить ту же задачу, если къ одной изъ точекъ системы приложена сила: $F_1 = 2$, къ другой: $F_2 = -2$.

10. Опредѣлить движеніе центра инерціи системы, на точки которой дѣйствуютъ силы, пропорціональныя массамъ послѣднихъ, при чемъ отношеніе силъ къ массамъ равно 2, въ слѣдующихъ случаяхъ:

а) точки системы до приложенія силъ находились въ покоѣ;

б) центръ инерціи имѣлъ скорость $V_0 = 4$, совпадающую съ направленіемъ силъ;

в) центръ инерціи имѣлъ скорость $V_0 = 4$, перпендикулярную къ направленію силъ.

Рѣшенія задачъ

1 $W_x = \frac{\Sigma X}{\mu} = \frac{0}{6} = 0$, $W_y = 1$, $W_z = 0$

$V_x = V_{x_0} + W_x \cdot t = 2$, $V_y = t$, $V_z = 0$

$\xi = 2t$; $\eta = \frac{t^2}{2}$; $\zeta = 0$

2 $\xi = \frac{m'x' + m''x''}{m' + m''} = \frac{6t}{4} = 1{,}5\,t$; $\eta = \frac{3(4t^2 - 2) + 6}{4} = 3t^2$, $\zeta = \frac{\pi}{4}$;

$V_x = 1{,}5$, $V_y = 6t$, $V_z = 0$

$W_x = 0$; $W_y = 6$; $W_z = 0$

а) $\xi = 3$, $\eta_2 = 12$, $\zeta = \frac{\pi}{4}$;

б) $V_2 = \sqrt{1{,}5^2 + 12^2}$,

в) $X = 0$, $Y = 6\mu = 24$, $Z = 0$

3 и 4 Ходъ рѣшенія см. зад. 2

5 $X = 0$, $Y = 6t$, $Z = 2t$

6 $W_x = 0$, $W_y = 3t$, $W = \frac{t}{2} - 1$

$V_x = 0$, $V = 1 + \frac{3t^2}{2}$, $V = \frac{t^2}{4} - t$

$W = 0{,}5$, $V = 0{,}5\,t$, уравненіе разстояній, $\xi = \frac{1}{4}\,t^2$.

9 Центръ инерціи будетъ оставаться въ покоѣ, такъ какъ $\Sigma F = 0$

10 а) $W = \frac{\Sigma F}{\Sigma m} = 2$, $V = 2t$

б) $V = 4 + 2t$,

в) $V = 2\sqrt{4 + t^2}$

*

ГЛАВА XXII.

Законъ количествъ движенія

§ 209. Выводъ закона количествъ движенія

Законъ количествъ движенія для системы матерьяльныхъ точекъ безъ затрудненія выводится изъ подобнаго же закона для одной матерьяльной точки. Для проекціи количества движенія на произвольную ось l мы имѣли (§ 151):

$$mv_l - mv_{0l} = \text{пр} \sum_0^t R_l \Delta t \tag{151}$$

Замѣтимъ при этомъ, что подъ R нужно разумѣть равнодѣйствующую всѣхъ силъ, приложенныхъ къ какой-либо точкѣ системы, какъ внѣшнихъ, такъ и внутреннихъ. Мы можемъ теперь же раздѣлить тѣ и другія на двѣ отдѣльныя групы.

Обозначивъ равнодѣйствующую внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ какой либо точкѣ системы, черезъ E, а равнодѣйствующую внутреннихъ силъ черезъ J, будемъ имѣть:

$$\bar{R} = \bar{E} + \bar{J}$$

Для проекцій всѣхъ этихъ силъ на произвольную ось получимъ (§ 24)

$$R_l = E_l + J_l.$$

Вводя въ уравненіе (151) вмѣсто проекціи равнодѣйствующей отдѣльно проекціи силъ E и J, найдемъ:

$$mv_l - mv_{0l} = \text{пр} \sum_0^t E_l \Delta t + \text{пр} \sum_0^t J_l \Delta t$$

Примѣняя это выраженіе ко всѣмъ точкамъ разсматриваемой системы поочередно будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} m\,v_l - m'\,v_{0l} &= \text{пр} \sum_0^t E_l\ \Delta t + \text{пр} \sum_0^t J_l\ \Delta t \\ m'v_l' - m''v_{0l} &= \text{пр} \sum_0^t E_l\ \Delta t + \text{пр.} \sum_0^t J_l\ \Delta t \\ m'''v_l' - m\ v_{0l}' &= \text{пр} \sum_0^t E_l\ \Delta t + \text{пр} \sum_0^t J_l''\Delta t \\ \ldots\ldots &\quad \ldots \end{aligned}\right\} \tag{152}$$

Сложимъ почленно эти равенства.

$$\sum^{n} mv_l - \sum_{1}^{n} mv_{0l} = \sum^{n} \text{пр} \sum_{0}^{t} L\,\Delta t + \sum_{1} \text{пр} \sum_{0}^{t} J_l \Delta t \qquad (153)$$

Покажемъ, что послѣдній членъ второй части этого выраженія равенъ нулю. Онъ можетъ быть представленъ такъ:

$$\text{пр} \sum_{1}^{t} J_l\,\Delta t + \text{пр} \sum_{0}^{t} J_l'\,\Delta t + \text{пр} \sum_{0}^{t} J_l''\,\Delta t + \ldots$$

Каждый же изъ этихъ членовъ подробно напишется слѣдующимъ образомъ:

$$\text{пр} \sum_{0}^{t} J_l\,\Delta t = \text{пр}\,(J_{1l}\,\Delta_1 t + J_{2l}\,\Delta_2 t + J_{3l}\,\Delta_3 t + \ldots)$$

$$\text{пр} \sum_{0}^{t} J_l'\,\Delta t = \text{пр}\,(J_{1l}'\,\Delta_1 t + J_{2l}'\,\Delta_2 t + J_{3l}'\,\Delta_3 t + \ldots)$$

Сложимъ члены, соотвѣтствующіе одному и тому же промежутку времени между собою, помня что сумма предѣловъ равна предѣлу суммы:

$$\begin{aligned}\sum^{n} \text{пр} \sum_{0}^{t} J_l \Delta t = \text{пр}\,[&(J_{1l}\,\Delta_1 t + J_{1l}'\,\Delta_1 t + J_{1l}''\,\Delta_1 t + \ldots) + \\ &+ (J_{2l}'\Delta_2 t + J_{2l}''\Delta_2 t + J_{2l}'''\Delta_2 t + \ldots) + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots] = \\ = \text{пр}\,[(J_{1l} + J_{1l}' + J_{1l}'' + \ldots)\,&\Delta_1 t + (J_{2l} + J_{2l}' + J_{2l}'' + \ldots)\,\Delta_2 t + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots].\end{aligned}$$

Суммы, стоящія въ круглыхъ скобкахъ множителями у $\Delta_1 t$, $\Delta_2 t$, $\Delta_3 t \ldots$ суть суммы проекцій на ось l всѣхъ внутреннихъ силъ въ системѣ для различныхъ мгновеній, соотвѣтствующихъ началамъ или концамъ каждаго изъ указанныхъ промежутковъ $\Delta_1 t$, $\Delta_2 t$, ... Но уже было доказано, что сумма проекцій внутреннихъ силъ на любое направленіе (для одного и того же мгновенія) всегда равна нулю (§ 198), а потому и указанныя суммы равны нулямъ. Слѣдовательно и все послѣднее выраженіе равно нулю. Окончательно вмѣсто уравненія (152) имѣемъ:

$$\sum_{1} mv - \sum mv_{0l} = \sum_{1}^{n} \text{пр} \sum_{0}^{t} E\,\Delta t \qquad (154)$$

Уравненіе это и выражаетъ собою законъ количествъ движенія для системы точекъ и можетъ быть прочитано такъ: разность между конечнымъ и начальнымъ количествомъ движенія системы точекъ по данному направленію или, что то же, пріобрѣтенное системой точекъ количество движенія по данному направленію равно суммѣ конечныхъ импульсовъ внѣшнихъ силъ для того же направленія и того же промежутка времени.

Не трудно написать послѣднее выраженіе для каждой изъ координатныхъ осей, а именно:

$$\left.\begin{aligned}
\sum mv_x - \sum mv_{x_0} &= \sum \text{пр} \sum_0^t X\,\Delta t \\
\sum mv_y - \sum_1^n mv_{y_0} &= \sum_1 \text{пр} \sum_0^t Y\,\Delta t \\
\sum mv_z - \sum_1 mv_{z_0} &= \sum \text{пр} \sum_0^t Z\,\Delta t
\end{aligned}\right\} \qquad (155)$$

Выше было найдено (§ 202)

$$\sum mv_x = \mu V_x,$$
$$\sum mv_y = \mu V_y,$$
$$\sum mv_z = \mu V_z,$$

а потому законъ количествъ движенія можетъ быть изображенъ такъ

$$\left.\begin{aligned}
\mu V_x - \mu V_{x_0} &= \sum_1^n \text{пр} \sum_0^t X_t\,\Delta t \\
\mu V_y - \mu V_{y_0} &= \sum_1 \text{пр} \sum_0^t Y_t\,\Delta t \\
\mu V_z - \mu V_{z_0} &= \sum_1 \text{пр} \sum_0^t Z\,\Delta t
\end{aligned}\right\} \qquad (156)$$

Первыя части этихъ уравненій представляютъ пріобрѣтенныя центромъ инерціи количества движенія по тремъ осямъ. Каждое изъ нихъ выражается векторомъ, паралельнымъ соотвѣтствующей оси. Если бы мы пожелали найти дѣйствительно пріобрѣтенное количество движенія (полное), то для этого необходимо было бы сложить геометрически эти вектора.

§ 210. Законъ сохраненія количествъ движенія.

Если суммы проекцій внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на данную систему точекъ, на каждую изъ трехъ взаимноперпендикулярныхъ осей равны нулю, то количество движенія данной системы остается постояннымъ.

Преобразованіемъ вторыхъ частей уравненій (156), подобнымъ изложенному выше относительно уравненія (153), не трудно показать, что при сдѣланномъ предположеніи части эти обращаются въ нули, а потому получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \mu V_x &= \mu V_{x_0}, \\ \mu V_y &= \mu V_{y_0}, \\ \mu V_z &= \mu V_{z_0} \end{aligned}\right\} \qquad (157)$$

откуда

$$\mu V = \mu V_0,$$

т. е. количество движенія системы остается постояннымъ, сохраняется.

Легко видѣть, что законъ сохраненія количества движенія непосредственно слѣдуетъ изъ закона сохраненія движенія центра инерціи. Сущность того и другого состоитъ въ томъ, что скорость центра инерціи не измѣняется; а умноживъ скорость на массу, мы получимъ количество движенія системы, которое въ этомъ случаѣ также не измѣняется.

Очевидно, всѣ примѣры, подтверждающіе законъ сохраненія движенія центра инерціи, служатъ также для подтвержденія закона сохраненія количества движенія тѣла, при чемъ законъ этотъ можетъ быть примѣненъ какъ для произвольнаго направленія при наличности равенствъ (157), такъ и для опредѣленной оси, для которой можетъ быть примѣнено одно изъ этихъ равенствъ.

ГЛАВА XXIII

Законъ моментовъ количествъ движенія

§ 211. Законъ момента количества движенія для матерьяльной точки *).

Если мы имѣемъ движущуюся точку, скорости которой въ мгновенія t и $(t + \Delta t)$ будутъ соотвѣтственно: v_t и $v_{t+\Delta t}$, то разность

$$\Delta u = v_{t+\Delta t} - v_t \tag{158}$$

называется, какъ извѣстно пріобрѣтенной скоростью (§ 68)

Въ § 191 было доказано, что моментъ равнодѣйствующей силъ приложенныхъ къ точкѣ, равенъ суммѣ моментовъ составляющихъ относительно одной и той же оси Теорема эта на основаніи замѣчанія въ § 186 относительно моментовъ скоростей можетъ быть примѣнена къ послѣднимъ, а потому пользуясь уравненіемъ, въ которомъ скорость $v_{t+\Delta t}$ есть составная а Δu и v — составляющія можетъ написать:

$$M(v_{t+\Delta t}) = M(v_t) + M(\Delta u)$$

или

$$M(\Delta u) = M(v_{t+\Delta t}) - M(v_t),$$

гдѣ буква M обозначаетъ моментъ вектора стоящаго въ скобкахъ относительно произвольной оси.

Раздѣлимъ всѣ члены этого равенства на промежутокъ времени Δt, которому соотвѣтствуетъ приращеніе скорости Δu; такъ какъ Δt есть количество, не имѣющее направленія, мы можемъ подвести его подъ знакъ моментовъ что и сдѣлаемъ въ первой части равенства; тогда получимъ

$$M\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right) = \frac{M(v_{t+\Delta t}) - M(v_t)}{\Delta t}$$

Возьмемъ предѣлы обѣихъ частей этого выраженія подводя Δt къ нулю:

$$\text{пр } M\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right) = \text{пр} \left[\frac{M(v_{t+\Delta t}) - M(v_t)}{\Delta t}\right]$$

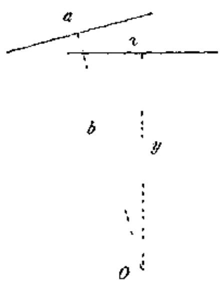
Но предѣлъ какой либо функціи согласно опредѣленію предѣла, равенъ самой функціи, сложенной съ нѣкоторой безконечномалой

*) Мы не излагали этого закона въ динамикѣ точки потому, что онъ имѣетъ значеніе для послѣдующихъ выводовъ только въ системѣ точекъ.

величиной. Обозначая послѣднюю черезъ δ, можемъ написать

$$\text{пр } M\left(\frac{v}{\Delta t}\right) = \frac{M(v_{t+\Delta t}) - M(v_t)}{\Delta t} + \delta$$

Предѣлъ же момента какой либо перемѣнной равенъ моменту предѣла той же перемѣнной. Въ самомъ дѣлѣ, если напр. векторъ a есть предѣлъ вектора x (фиг. 170), а y и b суть соотвѣтственно разстоянія x и a до точки (или оси) O, то имѣемъ



170

$$M(x) = xy$$

$$\text{пр } [M(x)] = \text{пр. }(xy) = \text{пр. }(x) \text{ пр }(y) = M[\text{пр. }(x)]$$

а потому имѣемъ

$$\text{пр } M\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = M\left(\text{пр } \frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = M(w),$$

гдѣ w ускореніе точки (полное), слѣдовательно,

$$M(w) = \frac{M(v_{t+\Delta t}) - M(v_t)}{\Delta t} + \delta$$

Умноживъ всѣ члены этого выраженія на массу точки m, найдемъ

$$M(mw) = M(R) = \frac{M(mv_{t+\Delta t}) - M(mv_t)}{\Delta t} + m\delta$$

гдѣ R есть равнодѣйствующая всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ. Произведеніе же безконечномалой δ на конечную величину m есть опять безконечномалая величина; обозначимъ ее черезъ α.

Послѣднее выраженіе помножимъ на промежутокъ времени Δt, причемъ въ первой части подведемъ множитель этотъ подъ знакъ момента

$$M(R\Delta t) = M(mv_{t+\Delta t}) - M(mv_t) + \alpha\,\Delta t$$

Напишемъ рядъ подобныхъ выраженій для всѣхъ элементовъ $\Delta_1 t$, $\Delta_2 t$, $\Delta_3 t \ldots$, на которые мы раздѣлимъ данный промежутокъ времени t, причемъ скорости, соотвѣтствующія концамъ этихъ промежутковъ, обозначимъ черезъ $v_1, v_2, v_3 \ldots$, начальную же скорость черезъ v_0:

$$M(R_1\Delta_1 t) = M(mv_1) - M(mv_0) + \alpha\,\Delta_1 t,$$

$$M(R_2\Delta_2 t) = M(mv_2) - M(mv_1) + \alpha_2\Delta_2 t,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$M(R_{n-1}\Delta_{n-1} t) = M(mv_{n-1}) - M(mv_{n-2}) + \alpha_{n-1}\Delta_{n-1} t,$$

$$M(R_n\Delta_n t) = M(mv) - M(mv_{n-1}) + \alpha_n\Delta_n t$$

Величины α_1, α_2, α_3 ... въ этихъ уравненіяхъ будутъ вообще говоря различны между собою, но такъ какъ мы затѣмъ будемъ брать предѣлы этихъ выраженій, а при вычисленіи предѣла мы можемъ одну безконечномалую замѣнить другой безъ вліянія на результатъ вычисленія (§ 11 слѣдствіе 2), то примемъ вездѣ вмѣсто $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$, нѣкоторую безконечномалую α; напр. среднюю изъ нихъ, или наибольшую, или наконецъ любую по нашему произволу.

Сложимъ соотвѣтственныя части всѣхъ этихъ выраженій и возьмемъ α въ послѣднемъ членѣ за скобки:

$$\sum_0^t M(R\Delta t) = M(mv) - M(mv_0) + \alpha(\Delta_1 t + \Delta_2 t + \ldots)$$

Но сумма

$$(\Delta_1 t + \Delta_2 t + \Delta_3 t + \ldots) = t$$

а потому

$$\sum_0^t M(R\Delta t) = M(mv) - M(mv_0) + \alpha \cdot t$$

Возьмемъ предѣлы обѣихъ частей, подводя всѣ элементы времени Δt къ нулю, получимъ:

$$\text{пр} \sum_0^t M(R\Delta t) = \text{пр}\ [M(mv)] - \text{пр}\ [M(mv_0)] + \text{пр}\ (\alpha \cdot t)$$

Въ этомъ выраженіи члены

$$M(mv) \text{ и } M(mv_0)$$

отъ Δt не зависятъ, а потому

$$\text{пр}\ [M(mv)] = M(mv)$$

$$\text{пр}\ [M(mv_0)] = M(mv_0);$$

кромѣ того

$$\text{пр}\ (\alpha \cdot t) = \text{пр}\ (\alpha) \cdot \text{пр}\ (t) = 0 \cdot t = 0$$

Окончательно находимъ

$$\text{пр} \sum_0^t M(R\Delta t) = M(mv) - M(mv_0) \tag{159}$$

Выраженіе, стоящее подъ знакомъ суммы въ первой части уравненія, есть моментъ элементарнаго импульса равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ точкѣ: вся же первая часть представляетъ собою конечный моментъ импульса равнодѣйствующей; во второй части имѣемъ приращеніе момента количества движенія. Итакъ, можемъ сказать, что конечный моментъ импульса равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ, относительно какой либо оси равенъ при ращенію момента количества движенія въ продолженіи того же промежутка времени и относительно той же оси.

При примѣненіи высшей математики уравненіе момента количества движенія находится такъ

Имѣемъ

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mx'' = X$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = my'' = Y$$

Умножимъ первое уравненіе на y, второе на x и вычтемъ первое изъ второго:

$$m(xy'' - yx'') = Yx - Xy$$

или

$$m(xy'' + y'x' - yx'' - y'x') =$$

$$= m\frac{d(xy' - yx')}{dt} = Yx - Xy$$

Отсюда

$$d[(my')x - (mx')y] = (Yx - Xy)\,dt$$

или

$$d[(mv_y)x - (mv_x)y] = (Yx - Xy)\,dt$$

Если равнодѣйствующая будетъ R, то

$$(Yx - Xy)\,dt = M_z(Rdt).$$

Точно такъ же для скорости имѣемъ

$$(v_y x - v_x y) = M_z(v),$$

откуда

$$(mv_y)x - (mv_x)y = M_z(mv)$$

Слѣдовательно

$$dM_z(mv) = M_z(Rdt).$$

Интегрируя это уравненіе въ предѣлахъ отъ 0 до t, получимъ:

$$M_z(mv) - M_z(mv_0) = \int_0^t M_z(Rdt)$$

§ 212. Законъ моментовъ количествъ движенія для системы точекъ.

Законъ этотъ получается изъ только что найденнаго закона для одной матерьяльной точки простымъ суммированіемъ; производя это дѣйствіе по всѣмъ точкамъ системы, найдемъ:

$$\sum_1^n \text{пр} \sum_0^t M(R\Delta t) = \sum_1^n [M(mv) - M(mv_0)]$$

Здѣсь подъ R нужно разумѣть равнодѣйствующую всѣхъ силъ (внутреннихъ и внѣшнихъ), приложенныхъ къ той или другой точкѣ; но вспоминая доказанное выше положеніе, что сумма моментовъ всѣхъ внутреннихъ силъ системы относительно любой оси равна нулю, можно внести въ первую часть полученнаго выраженія нѣкоторое упрощеніе, исключивъ внутреннія силы, что можетъ быть произведено въ слѣдующей постепенности (см. § 209)

$$\sum_1^n \text{пр} \sum_0^t M(R\Delta t) = \sum_1^n \text{пр} \sum_0^t [M(R)]\,\Delta t =$$

$$= \text{пр} \sum_0^t \Big[\sum_1^n M(R)\Big]\,\Delta t = \text{пр} \sum_0^t \Delta t \sum_1^n M(R) =$$

$$= \text{пр} \sum_0^t \Delta t \sum M(R_e + R_i) = \text{пр} \sum_0^t \Delta t \sum_1 [M(R_e) + M(R_i)].$$

Здѣсь

$$M(R_i) = 0$$

а потому окончательно получаемъ

$$\text{пр} \sum_0^t \Delta t \sum_1 M(R_e) = \sum_1^n \text{пр} \sum_0^t M(R_e\Delta t) =$$

$$= \sum_1^n [M(mv) - M(mv_0)] \tag{160}$$

т. е. сумма моментовъ импульсовъ всѣхъ внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ данной системѣ относительно какой либо оси равна приращенію суммы моментовъ количествъ движенія для той же оси и для того же промежутка времени.

Напишемъ этотъ законъ въ примѣненіи къ тремъ прямоугольнымъ осямъ. Для оси Ox имѣли слѣдующее выраженіе для момента равнодѣйствующей внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ:

$$M(R_e) = Z_e y - Y_e z,$$

гдѣ Z_e и Y_e — проекціи силы R_e на оси Oz и Oy, а y и z — координаты данной точки.

Для импульса силы получаемъ

$$M(R_e\Delta t) = M(R_e)\,\Delta t = (Z_e y - Y_e z)\,\Delta t$$

Для оси Ox находимъ

$$\sum_1^n \text{пр} \sum_0^t (Z_e y - Y_e z)\,\Delta t = \sum_1 [M(mv)_{ox} - M(mv_0)_{ox}] \tag{161}$$

Для осей Oy и Oz соотвѣтственно имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} \sum_1 \text{пр} \sum_0^t (X_e z - Z_e x)\,\Delta t &= \sum_1 [M(mv)_{oy} - M(mv_0)_{oy}] \\ \sum_1^n \text{пр} \sum_0^t (Y_e x - X_e y)\,\Delta t &= \sum_1^n [M(mv)_{oz} - M(mv_0)_{oz}] \end{aligned}\right\} \tag{161}$$

§ 213. Законъ сохраненія моментовъ количествъ движенія

Если сумма моментовъ всѣхъ приложенныхъ къ данной системѣ точекъ внѣшнихъ силъ относительно любой оси равна нулю, т. е. (выраженіе 160)

$$\sum_1 M(R_e) = 0$$

а слѣдовательно

$$\text{пр} \sum_0^t \Delta t \sum M(R) = 0$$

то находимъ

$$\sum_1 [M(mv) - M(mv_0)] = 0$$

или

$$\sum_1 M(mv) = \sum M(mv_0) \qquad (162)$$

т. е. сумма моментовъ количествъ движенія относительно взятой оси имѣетъ постоянное значеніе, т. е. сохраняетъ свою величину.

Въ изложенномъ и заключается законъ сохраненія моментовъ количествъ движенія

§ 214. Примѣненіе закона сохраненія моментовъ количествъ движенія къ твердому тѣлу.

Разсмотримъ, какой видъ пріобрѣтаетъ общее выраженіе закона сохраненія моментовъ количествъ движенія въ примѣненіи къ твердому тѣлу въ томъ случаѣ, когда къ тому же тѣлу примѣнимъ законъ сохраненія движенія центра инерціи т. е. когда имѣемъ

$$\sum X = \sum Y = \sum Z = 0$$

Допустимъ для простоты разсужденій сверхъ того, что центръ инерціи разсматриваемаго тѣла находится въ покоѣ. Общность нашихъ выводовъ этимъ не будетъ ограничена, такъ какъ въ какомъ бы состояніи не находился центръ инерціи, внѣшнія силы по закону независимости произведутъ одно и то же дѣйствіе на тѣло и слѣдовательно выводы, сдѣланныя для покоющагося центра инерціи, будутъ приложимы и къ тѣлу въ томъ случаѣ, когда центръ инерціи находится въ движеніи съ какой бы то ни было скоростью. Въ такомъ случаѣ твердое тѣло можетъ получить подъ дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ только вращеніе около центра инерціи (§ 115), при чемъ каждое элементарное перемѣщеніе точекъ тѣла можетъ быть принято за вращательное около оси проходящей черезъ центръ инерціи Слѣ довательно во всякое данное мгновеніе всѣ точки тѣла должны обладать одной и той же угловой скоростью ω, а потому скорость каждой точки въ зависимости отъ разстоянія ея r до оси вращенія выразится произведеніемъ

$$r\omega$$

Количество движенія точки будетъ равно

$$mr\omega$$

а моментъ его при разстояніи r

$$mr^2\omega$$

Но сумма моментовъ количествъ движенія всѣхъ точекъ тѣла

$$\sum_1^n mr^2\omega$$

согласно сдѣланному предположенію есть величина постоянная т. е.

$$\sum_1^n mr^2\omega = C$$

Здѣсь ω можетъ быть вынесено за знакъ Σ

$$\omega\sum_1^n mr^2 = C$$

Выраженіе

$$\sum_1^n mr^2 = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \ldots$$

представляетъ сумму произведеній изъ массъ точекъ тѣла на квадраты разстояній ихъ до оси вращенія и называется **моментомъ инерціи тѣла относительно данной оси**. Моментъ инерціи тѣла обозначаютъ черезъ I. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\omega I = Const$$

ГЛАВА XXIV

О равновѣсіи силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу

§ 215. Въ чемъ должны заключаться условія равновѣсія силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу?

Какое бы, вообще говоря, конечное перемѣщеніе ни произвели внѣшнія силы, приложенныя къ данному тѣлу, мы всегда можемъ разбить его на рядъ безконечномалыхъ перемѣщеній *), а каждое изъ такихъ перемѣщеній, какъ это было показано въ главѣ о движеніи твердаго тѣла (§ 116), можетъ быть разложено на перемѣщеніе поступательное и вращательное. Далѣе извѣстно, что составное перемѣщеніе равно нулю или въ томъ случаѣ, когда каждое изъ составляющихъ перемѣщеній равно въ отдѣльности нулю, или когда перемѣщенія эти обратны другъ другу, но вращательное движеніе всего тѣла не можетъ уничтожить его поступательнаго движенія; вслѣдствіе этого произвольная система внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на твердое тѣло, должна удовлетворять въ отдѣльности, независимо двумъ условіямъ: во первыхъ, тому, чтобы тѣло подъ вліяніемъ данныхъ силъ не могло получить поступательнаго перемѣщенія, а во-вторыхъ тому, чтобы оно не получило и вращательнаго перемѣщенія. При выводѣ этихъ условій нѣтъ необходимости разсматривать тѣло, находящееся въ состояніи движенія, пользуясь началомъ независимости, мы можемъ упростить дѣло тѣмъ, что при нахожденіи интересующихъ насъ условій равновѣсія силъ мы будемъ предполагать тѣло покоющимся и такимъ образомъ всякое движеніе которое получитъ тѣло, подверженное дѣйствію внѣшнихъ силъ, будетъ обязано своимъ происхожденіемъ этимъ силамъ.

Разсмотримъ теперь въ отдѣльности, какимъ условіямъ должны удовлетворять внѣшнія силы, чтобы находящееся въ покоѣ твердое тѣло не получило ни поступательныхъ, ни вращательныхъ движеній.

§ 216. Условіе, которому должны удовлетворять внѣшнія силы, не вызывающія въ тѣлѣ поступательныхъ перемѣщеній.

Для вывода этихъ условій воспользуемся тѣмъ, что было найдено въ законѣ сохраненія движенія центра инерціи произвольной си-

*) За вычетомъ изъ него предварительнаго перемѣщенія тѣла, если оно находилось въ моментъ приложенія силъ къ нему въ движеніи.

стемы (§ 204). Повторяя тамъ изложенное, мы можемъ сказать, что центръ инерціи будетъ сохранять свое состояніе, находясь въ частномъ случаѣ въ покоѣ, если суммы проекцій всѣхъ внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ системы, на каждое изъ трехъ взаимно перпендикулярныхъ направленій будутъ равны нулю. Условіе это выражается слѣдующими уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} \sum X_e &= 0 \\ \sum Y_e &= 0 \\ \sum Z_e &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{162}$$

Но для того, чтобы въ твердомъ тѣлѣ, гдѣ разстоянія между точками остаются безъ измѣненія, не было поступательныхъ перемѣщеній, достаточно, чтобы какая либо точка его была неподвижна. Приведенныя уравненія выражають условія того, что центръ инерціи или покоится, или движется прямолинейно и равномѣрно, а слѣдовательно (при отсутствіи вращательныхъ движеній) въ такомъ же состояніи будутъ находиться и всѣ прочія точки твердаго тѣла, другими словами, внѣшнія силы, удовлетворяющія этимъ условіямъ, не произведутъ поступательнаго движенія покоющагося твердаго тѣла. Такимъ образомъ, для того, чтобы **внѣшнія силы приложенныя къ находящемуся въ покоѣ твердому тѣлу не произвели поступательнаго движенія его по какому бы то ни было направленію, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекцій внѣшнихъ силъ на каждую изъ трехъ прямоугольныхъ осей были въ отдѣльности равны нулю**.

§ 217. Условіе, которому должны удовлетворять внѣшнія силы, не вызывающія вращательныхъ движеній въ твердомъ тѣлѣ.

Для нахожденія этого условія воспользуемся тѣмъ, что было выведено относительно отсутствія поступательныхъ перемѣщеній (§ 204) и закономъ сохраненія моментовъ количествъ движенія (§ 213), который имѣлъ мѣсто въ томъ случаѣ, когда сумма моментовъ внѣшнихъ силъ относительно каждой изъ трехъ взаимноперпендикулярныхъ осей была равна нулю.

Если центръ инерціи твердаго тѣла покоится, то всякое элементарное перемѣщеніе остальныхъ точекъ тѣла приводится къ вращенію около оси, проходящей черезъ центръ инерціи. При этомъ сумма моментовъ количествъ движенія точекъ тѣла для любой оси, проходящей черезъ центръ инерціи тѣла, сохраняетъ свое значеніе. Общее выраженіе закона сохраненія моментовъ коли чествъ движенія въ этомъ случаѣ получаетъ слѣдующій видъ (§ 214)

$$\omega . I = Const,$$

гдѣ I — моментъ инерціи тѣла относительно оси вращенія и ω — угловая скорость вращенія

Положимъ теперь, что разсматриваемое нами тѣло находится въ покоѣ, т. е. $\omega = 0$. Если мы приложимъ къ подобному тѣлу систему силъ, при которыхъ законъ сохраненія моментовъ количествъ движенія остается въ силѣ, т. е. $\omega\, I = 0$, то тѣло не получитъ вращенія, такъ какъ I всегда нѣкоторое положительное число и, слѣдовательно указанное произведеніе будетъ нулемъ въ томъ случаѣ, когда $\omega = 0$

Только что найденное условіе, при которомъ данная система силъ не сообщаетъ тѣлу вращенія, можетъ быть обобщено на основаніи соображеній, изложенныхъ въ предыдущемъ параграфѣ Дѣйствительно, имѣя въ виду случай, когда центръ инерціи сохраняетъ свое состояніе или, что то же, когда сумма проекцій внѣшнихъ силъ на любую ось равна нулю, условіе, что сумма моментовъ внѣшнихъ силъ равна нулю относительно центра инерціи, будетъ выполнено если эта сумма моментовъ будетъ равна нулю относительно произвольной точки, принятой за центръ моментовъ (§ 194).

Итакъ, если центръ инерціи сохраняетъ свое состояніе или, что то же если

$$\sum X_e = 0 \quad \sum Y_e = 0 \quad \sum Z_e = 0$$

и если сумма моментовъ внѣшнихъ силъ относительно каждой изъ трехъ взаимноперпендикулярныхъ осей будетъ равна нулю, то тѣло не получитъ подъ дѣйствіемъ этихъ силъ вращательнаго движенія (а по § 216 оно не получитъ и поступательнаго перемѣщенія)

Аналитически условіе это по указанному выше выражается слѣдующими тремя уравненіями

$$\left.\begin{aligned}\sum (Z_e y - Y_e z) = 0\\ \sum (X_e z - Z_e x) = 0\\ \sum (Y_e x - X_e y) = 0\end{aligned}\right\} \qquad (163)$$

§ 218. Общія условія равновѣсія силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу. Уравненія равновѣсія.

Сопоставляя теперь все изложенное о движеніи твердаго тѣла, гдѣ было показано, что всякое элементарное перемѣщеніе его можетъ быть разложено на поступаніе и вращеніе со сказаннымъ въ §§ 216 и 217, мы можемъ формулировать общія условія равновѣсія твердаго тѣла слѣдующимъ образомъ.

Для равновѣсія твердаго тѣла необходимо и достаточно, чтобы были равны нулю:

1) суммы проекцій всѣхъ внѣшнихъ силъ на каждую изъ трехъ произвольно выбранныхъ взаимноперпендикулярныхъ осей и

2) суммы моментовъ всѣхъ внѣшнихъ силъ относительно каждой изъ трехъ взаимноперпендикулярныхъ осей.

Аналитически условія равновѣсія выражаются слѣдующими шестью уравненіями равновѣсія:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \sum X_e = 0 \\ &2)\ \sum Y_e = 0 \\ &3)\ \sum Z_e = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (164)$$

$$\left.\begin{aligned} &4)\ \sum (Z_e y - Y_e z) = 0 \\ &5)\ \sum (X_e z - Z_e x) = 0 \\ &6)\ \sum (Y_e x - X_e y) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (165)$$

Въ болѣе общемъ видѣ условія равновѣсія могутъ быть выражены слѣдующими двумя уравненіями

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \sum F_t = 0 \\ &2)\ \sum M(F)_t = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (166)$$

при чемъ по первому изъ нихъ сумма проекцій всѣхъ внѣшнихъ силъ на какую угодно ось равна нулю, а по второму — равна нулю сумма моментовъ всѣхъ внѣшнихъ силъ также относительно какой угодно оси.

§ 219. Частные случаи равновѣсія силъ

1) Тѣло имѣетъ неподвижную точку. Въ этомъ случаѣ поступательныя перемѣщенія въ твердомъ тѣлѣ невозможны, необходимость въ выполненіи условія (164) отпадаетъ, а потому условія равновѣсія выразятся такъ:

$$\sum (Z_e y - Y_e z) = 0$$

$$\sum (X_e z - Z_e x) = 0$$

$$\sum (Y_e x - X_e y) = 0$$

2) **Тѣло имѣетъ неподвижную ось вращенія.** Если тѣло не можетъ перемѣщаться вдоль этой оси, которую примемъ за ось Oz, то изъ всѣхъ шести уравненій равновѣсій внѣшнія силы должны удовлетворять лишь тому, которое исключаетъ возможность вращенія около этой оси т. е.

$$\sum (Y_e x - X_e y) = 0$$

Если же тѣло можетъ поступательно перемѣщаться вдоль этой оси, то къ написанному уравненію присоединяется еще уравненіе $\sum Z_e = 0$, исключающее возможность указаннаго поступательнаго перемѣщенія.

3) **Тѣло можетъ поступательно перемѣщаться параллельно данной плоскости.**

Если примемъ данную плоскость за плоскость xOy, то условія равновѣсія выразятся слѣдующими уравненіями:

$$\sum X_e = 0$$

$$\sum Y_e = 0$$

$$\sum (Y_e x - X_e y) = 0$$

Не входя въ изложеніе дальнѣйшихъ подробностей, относящихся къ равновѣсію силъ, составляющихъ предметъ статики, отсылаемъ читателя къ курсамъ послѣдней *).

---

*) С. Бобровскій. Статика. Курсъ Николаевскаго Инженернаго Училища. Спб., 1904.

А. Гречаниновъ. Основанія статики твердаго тѣла и системъ вообще. Харьковъ, 1899, и др.

ГЛАВА XXV.

Законъ живыхъ силъ

§ 220. Выводъ закона живыхъ силъ.

Методъ вывода этого закона для системы точекъ одинаковъ съ выводами изложенныхъ уже законовъ движенія центра инерціи и количествъ движенія. Воспользуемся закономъ живыхъ силъ для точки, гдѣ имѣли (126).

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \text{пр} \sum_0^s R\Delta s \cos(R, \Delta s)$$

Подъ R здѣсь разумѣется равнодѣйствующая всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ; слѣдовательно, при разсмотрѣніи точки, входящей въ составъ системы, R представляетъ собою равнодѣйствующую какъ внѣшнихъ, такъ и внутреннихъ силъ, т. е.

$$R = \overline{R_e} + \overline{R_i}.$$

А такъ какъ работа равнодѣйствующей силы равна суммѣ работъ силъ составляющихъ (§ 161), то

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \text{пр} \sum_0^s R_e \Delta s \cos(R_e, \Delta s) + \text{пр} \sum_0^s R_i \Delta s \cos(R_i, \Delta s)$$

Напишемъ это выраженіе въ примѣненіи ко всѣмъ точкамъ тѣла, число которыхъ обозначимъ черезъ n, и сложимъ соотвѣтственные члены полученныхъ выраженій, тогда будемъ имѣть:

$$\sum_1^n \frac{mv^2}{2} - \sum_1^n \frac{mv_0^2}{2} = \sum_1^n \text{пр} \sum_0^s R_e \Delta s \cos(R_e, \Delta s) +$$

$$+ \sum_1^n \text{пр} \sum_0^s R_i \Delta s \cos(R_i, \Delta s) \qquad (167)$$

Это и есть общій видъ закона живыхъ силъ для системы точекъ. Мы можемъ прочесть его такъ: разность между конечной $\left(\sum_1^n \frac{mv^2}{2}\right)$

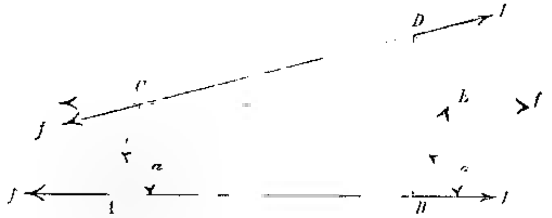
и начальной $\left(\sum \frac{mv_0^2}{2}\right)$ живой силой тѣла или, что то же пріобрѣтенная тѣломъ живая сила равна суммѣ работъ всѣхъ силъ, приложенныхъ къ тѣлу, какъ внѣшнихъ, такъ и внутреннихъ.

Отличіе этого закона по внѣшней формѣ отъ закона движенія центра инерціи и закона количествъ движенія состоитъ въ томъ, что внутреннія силы, вообще говоря, не исчезаютъ изъ выраженія его, такъ какъ работа ихъ равна нулю только въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ. Такъ какъ послѣдніе имѣютъ большое примѣненіе, то мы остановимся на ихъ разсмотрѣніи.

§ 221. Законъ живыхъ силъ для твердаго тѣла.

При всѣхъ перемѣщеніяхъ частицъ твердаго тѣла разстоянія между ними не измѣняются; покажемъ, что при этомъ работа внутреннихъ силъ тѣла будетъ всегда нулемъ.

Возьмемъ простѣйшій случай, когда тѣло заключаетъ въ себѣ



171

всего двѣ точки A и B (фиг. 171), между которыми существуютъ силы взаимодѣйствія f и f_1 при чемъ $f = f_1$.

Допустимъ, что разсматриваемыя точки въ теченіе элемента времени перешли въ положенія C и D, пройдя разстоянія AC и BD, при чемъ $CD = AB$ (твердое тѣло), а также $f' = f_1'$ въ предположеніи, что величина внутреннихъ силъ зависитъ только отъ разстоянія между точками. Выше была доказана теорема, что работа силы въ составномъ перемѣщеніи равна работѣ той же силы при перемѣщеніяхъ составляющихъ (§ 162). Представимъ себѣ, что описанное передвиженіе воображаемой прямой AB въ CD произошло такъ: сначала она перемѣстилась паралельно самой себѣ въ положеніе CE, а затѣмъ повернулась около точки C, описавъ концомъ E дугу круга ED. Работа T внутреннихъ силъ f и f_1 при сказанномъ составномъ перемѣщеніи будетъ такова:

работа силы $f = f \cdot AC \cos(180 - \alpha) = -f \cdot AC \cos\alpha$

работа силы $f_1 = f_1 \, BE \cos\alpha + f_1' \, \overline{ED} \, \cos(f_1', ED)$

а потому:

$$T = -f . AC \cos\alpha + f_1 BE \cos\alpha + f_1 \overset{\frown}{ED} \cos(f_1, ED)$$

Такъ какъ

$$f = f_1 \quad \text{и} \quad AC = BE$$

то

$$-f . AC \cos\alpha + f_1 BE \cos\alpha = 0$$

Кромѣ того при перемѣщеніи точки E приложенія силы f_1 по дугѣ круга ED сила f_1 постоянно направлена по радіусу, слѣдовательно нормально къ пути, проходимому точкой, т. е. $\angle (f_1, ED) = 90°$ и $\cos (f_1, ED) = 0$, значитъ и

$$f_1 . \overset{\frown}{ED} . \cos (f_1, ED) = 0$$

Итакъ въ результатѣ имѣемъ:

$$T = 0$$

т. е. работа внутреннихъ силъ въ разсмотрѣнной неизмѣняемой системѣ двухъ точекъ при всякомъ перемѣщеніи ихъ равна нулю, что происходитъ вслѣдствіе того, что разстояніе между точками не измѣняется и внутреннія силы парны. Но силы эти парны и во всякой другой неизмѣняемой системѣ точекъ и потому для каждой пары ихъ не трудно будетъ примѣнить только что выведенное положеніе, а слѣдовательно: сумма работъ внутреннихъ силъ произвольнаго твердаго тѣла при любомъ перемѣщеніи его будетъ равна нулю.

Вслѣдствіе только что изложенной теоремы законъ живыхъ силъ въ примѣненіи къ твердому тѣлу пріобрѣтаетъ слѣдующую форму:

$$\sum_1^n \frac{mv^2}{2} - \sum_1^n \frac{mv_0^2}{2} = \sum_1^n \text{пр} \sum_0 R_e \Delta s \cos (R_e, \Delta s) \qquad (168)$$

гдѣ вторая часть представляетъ сумму работъ всѣхъ внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ тѣлу; обозначая работу каждой изъ внѣшнихъ силъ черезъ T_e, для суммы работъ ихъ получимъ $\sum_1^k T_e$, гдѣ k — число внѣшнихъ силъ, а потому

$$\sum_1^n \frac{mv^2}{2} - \sum_1^n \frac{mv_0^2}{2} = \sum_1^k T_e \qquad (169)$$

что читается такъ: при всякомъ движеніи твердаго тѣла приращеніе живой силы его равно суммѣ работъ всѣхъ внѣшнихъ силъ, къ нему приложенныхъ.

Выраженіе работъ внѣшнихъ силъ можетъ получить другую форму, если мы воспользуемся положеніемъ, доказаннымъ въ кинетикѣ точки работа равнодѣйствующей равна суммѣ работъ силъ составляющихъ. Примѣняя его къ силамъ, разложеннымъ по тремъ взаимноперпендикулярнымъ направленіямъ Ox, Oy, Oz, найдемъ (§ 161):

$$R\Delta s \cos(R_e, \Delta s) = X_e\Delta x + Y_e\Delta y + Z_e\Delta z.$$

Вводя вторую часть этого равенства въ выраженіе (169) получимъ

$$\sum_1^n \frac{mv^2}{2} - \sum_1^n \frac{mv_0^2}{2} = \sum_1^n \text{пр.} \sum_0^s (X_e\Delta x + Y_e\Delta y + Z_e\Delta z) =$$
$$= \sum_1^n \left(\text{пр.} \sum_0^s X_e\Delta x + \text{пр.} \sum_0^s Y_e\Delta y + \text{пр.} \sum_0^s Z_e\Delta z\right) \qquad (170)$$

§ 222. **Законъ живыхъ силъ при поступательномъ движеніи твердаго тѣла.**

При поступательномъ движеніи твердаго тѣла, т. е. въ томъ случаѣ, когда всѣ точки тѣла проходятъ въ одинъ и тотъ же промежутокъ времени равные и паралельные между собою пути, скорости всѣхъ точекъ будутъ между собою равны, а потому въ уравненіи (169) онѣ могутъ быть вынесены за знаки суммъ; тогда уравненіе, выражающее законъ живыхъ силъ, получитъ такой видъ:

$$\sum_1^n \frac{mv^2}{2} - \sum_1^n \frac{mv_0^2}{2} = \frac{v^2}{2}\sum_1^n m - \frac{v_0^2}{2}\sum_1^n m =$$
$$= \frac{Mv^2}{2} - \frac{Mv_0^2}{2} = \sum_1^k T \qquad (171)$$

гдѣ M — масса тѣла, а v_0 и v — начальная и конечная скорости произвольной точки его.

Кромѣ того и выраженіе работы силъ можетъ получить специальную форму, такъ какъ пути, проходимые всѣми точками приложенія этихъ силъ въ одинъ и тотъ же промежутокъ времени, между собою равны. Въ этомъ случаѣ выраженіе (168)

$$\sum T_e = \sum \text{пр} \sum_0^s R_e\Delta s \cos(R_e, \Delta s)$$

пріемомъ подобнымъ указанному въ § 209, приводится къ виду

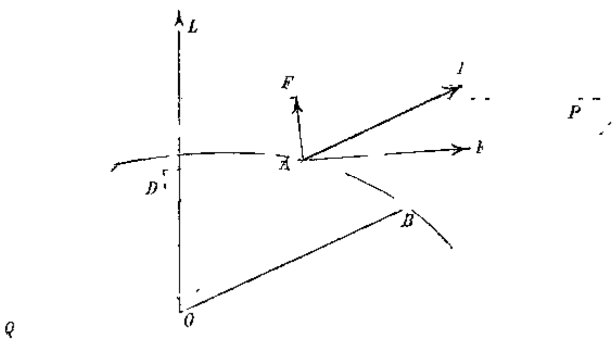
$$\sum T_e = \text{пр} \sum_0^s \left[\sum_1^n R_e \cos(R_e, \Delta s)\right] \Delta s \qquad (172)$$

гдѣ $\sum R_e \cos(R_e, \Delta s)$ есть сумма проекцій внѣшнихъ силъ на направленіе перемѣщенія.

§ 223 Законъ живыхъ силъ при вращательномъ движенiи твердаго тѣла.

Предварительно покажемъ, какъ вычисляется работа силы въ томъ случаѣ, когда точка приложенiя ея описываетъ дугу круга Пусть будетъ (фиг. 172) A точка, къ которой приложена сила F, точка A описываетъ элементарную дугу AB круга съ центромъ въ O, лежащую въ плоскости PQ, OL ось, перпендикулярная къ этой плоскости.

Сила F можетъ быть разложена на двѣ: F_1, лежащую въ плоскости PQ, и F_2, къ ней перпендикулярную. Работа силы F при разсматриваемомъ элементарномъ перемѣщенiи $AB = \Delta s$ точки будетъ равна суммѣ работъ силъ составляющихъ. Но F_2 перпендику



172.

лярна къ направленiю перемѣщенiя, а потому работа ея равна нулю слѣдовательно, работа силы F равна работѣ силы F_1 Послѣдняя же работа выражается такъ:

$$\Delta T = F_1 \,.\, \Delta s \cos(F_1 \, \Delta s)$$

Но

$$\Delta s = OA \, \Delta\varphi = r \, \Delta\varphi$$

и потому

$$\Delta T = F_1 \, r \, \Delta\varphi \cos(F_1 \, \Delta s) = F_1 \, r \cos(OD \, OA) \, \Delta\varphi = F_1 \, OD \, \Delta\varphi$$

Здѣсь $F_1 \,.\, OD$ есть моментъ вектора F_1 относительно точки O а такъ какъ F_1 представляетъ собою проекцiю вектора F (данной силы) на плоскость PQ, перпендикулярную къ оси OL то $F_1 \, OD$ есть моментъ силы F относительно оси OL.

Такимъ образомъ мы получили, что при вращательномъ перемѣщенiи точки работа силы, къ ней приложенной, равна произведенiю изъ момента силы относительно оси вращенія на уголъ вращенія (на угловое перемѣщеніе точки). Теорема эта поможетъ намъ вычислить работу силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, при вращательномъ перемѣщеніи его около нѣкоторой оси. Напомнимъ, что при этомъ достаточно найти только работу силъ внѣшнихъ, такъ какъ работа внутреннихъ силъ при движеніи твердаго тѣла всегда равна нулю (§ 221).

При вращеніи тѣла всѣ точки его описываютъ дуги круговъ, центры которыхъ лежатъ на взятой оси, а потому работа каждой изъ внѣшнихъ силъ будетъ равна произведенію изъ момента ея на угловое перемѣщеніе точки приложенія, т. е.

$$M_i \,.\, \Delta\varphi$$

А слѣдовательно сумма работъ всѣхъ внѣшнихъ силъ выразится такъ

$$\sum_1^k M_i \Delta\varphi$$

гдѣ k число внѣшнихъ силъ. Но угловыя перемѣщенія различныхъ точекъ твердаго тѣла, соотвѣтствующія одному и тому же промежутку времени, необходимо равны между собою, а потому имѣемъ

$$\sum^k M_i \,.\, \Delta\varphi = \Delta\varphi \sum_1^k M_i \tag{173}$$

т. е. сумма работъ внѣшнихъ силъ при элементарномъ вращательномъ перемѣщеніи твердаго тѣла около неподвижной оси равна произведенію изъ угловаго перемѣщенія тѣла на сумму моментовъ всѣхъ внѣшнихъ силъ относительно оси вращенія.

Для конечнаго вращенія на уголъ φ получимъ

$$\text{пр} \sum_0^{\varphi} \Delta\varphi \sum^k M_i$$

Приращеніе живой силы въ разсматриваемомъ случаѣ также пріобрѣтаетъ специальную форму. Дѣйствительно, скорость какой либо точки тѣла

$$v = \omega r,$$

гдѣ ω — угловая скорость ея, а — радіусъ вращенія. А потому

$$\sum \frac{mv^2}{2} \quad \sum^n \frac{mv_0^2}{2} = \sum_1 mr^2 \frac{\omega^2}{2} - \sum^n mr^2 \frac{\omega_0^2}{2} =$$

$$= \sum_1^n mr^2 \frac{\omega^2 \quad \omega_0}{2}$$

Выраженіе $\sum mr^2$, какъ было указано выше (§ 214), называется полярнымъ моментомъ инерціи тѣла относительно данной оси и обозначается I, а потому для приращенія живой силы получаемъ:

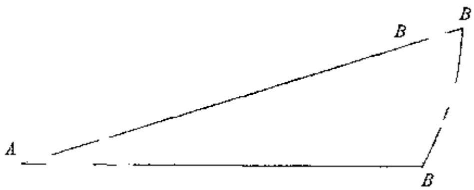
$$I\frac{\omega^2-\omega_0^2}{2}.$$

Соединяя полученныя выраженія для работы и для живой силы вмѣстѣ, найдемъ:

$$\text{пр.}\sum_0^{\varphi}\Delta\varphi\sum_1^{k}M_i = I\frac{\omega^2-\omega_0^2}{2} \qquad (174)$$

§ 224. Законъ живыхъ силъ для промежутка времени, по истеченіи котораго точки тѣла приходятъ въ первоначальное положеніе *).

Въ этомъ случаѣ разстоянія между точками въ началѣ и концѣ промежутка времени равны между собою. Покажемъ, что при такомъ предположеніи сумма работъ внутреннихъ силъ въ системѣ для элементарнаго промежутка времени будетъ равна нулю; для простоты разсмотрѣнія возьмемъ систему изъ двухъ точекъ A и B,



173

къ которымъ соотвѣтственно приложены равныя между собою внутреннія силы f и f_1. Какъ показано въ § 22., при вычисленіи суммы работъ внутреннихъ силъ можно одну изъ этихъ точекъ считать неподвижною. Перемѣщеніе другой точки всегда можно разложить на два частныхъ перемѣщенія, изъ которыхъ при одномъ разстояніе этихъ двухъ точекъ не мѣняется, а при другомъ вторая точка движется по прямой линіи, соединяющей ее съ первою точкой, т. е. происходитъ растяженіе или сжатіе тѣла.

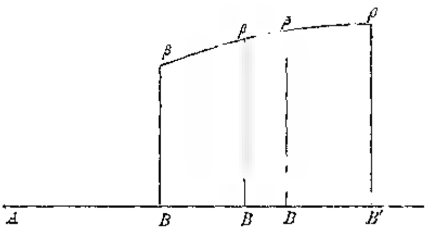
Напр. (фиг. 173), если перемѣщеніе точки есть BB', то его можно разложить на перемѣщеніе BB'', при которомъ разстояніе AB'' равно AB и на перемѣщеніе $B''B'$. То же самое относится и до всѣхъ промежуточныхъ точекъ перемѣщенія BB'. Работа внутренней силы, дѣйствующей на B, можетъ быть вычислена для перемѣщенія BB' посредствомъ сложенія работъ для двухъ частныхъ перемѣщеній BB'' и $B''B'$ **). Но по доказанному работа для BB'' равна нулю

*) Л. Кирпичевъ. Начала механики, стр. 134.

**) *Работа силы вообще для составного перемѣщенія равна суммѣ работъ той же силы для перемѣщеній слагаемыхъ (§ 161).*

слѣдовательно, остается работа внутренней силы для перемѣщенія $B'B$, совпадающаго съ направленіемъ самой силы. Итакъ вопросъ теперь значительно упрощенъ. Во первыхъ, онъ приведенъ къ отысканію работы только одной внутренней силы· во вторыхъ, работа отыскивается для такого перемѣщенія двухъ точекъ, при которомъ только одна точка перемѣщается, а другая остается неподвижною· наконецъ, отыскивается работа только для такого перемѣщенія, которое происходитъ по направленію внутренней силы, т. е. по направленію прямой, соединяющей двѣ точки системы.

Пусть A и B на фиг. 174 изображаютъ начальныя положенія двухъ точекъ нашей системы. Точка A есть точка неподвижная, а точка B перемѣщается и притомъ не иначе, какъ по прямой AB Пусть напримѣръ точка B послѣдовательно приходитъ въ точки B', B'', B''' и такъ далѣе. При этомъ перемѣщеніи внутренняя сила, дѣйствующая на точку B измѣняется въ зависимости отъ измѣненія разстоянія AB. Представимъ законъ этого измѣненія графически Пусть величина силы, дѣйствующей на движущуюся точку, когда она находится въ B — есть $B\beta$; отложимъ эту силу по перпендикуляру къ AB *). Когда точка перейдетъ въ B', то величина силы на нее дѣйствующей будетъ $B'\beta'$; когда она перейдетъ въ B'' то величина силы будетъ $B''\beta''$, и такъ далѣе. Работа этой силы напримѣръ для перемѣщенія $B'B''$ будетъ измѣряться площадью $B'\beta'B''\beta''$; она — положительная, если перемѣщеніе идетъ въ ту же сторону, какъ и сила, и — отрицательная, если они идутъ въ разныя стороны



174

Такъ какъ точка, двигаясь изъ B по прямой AB, окончательно приходитъ въ свое начальное положеніе—въ B, то слѣдовательно, она непремѣнно пройдетъ перемѣщеніе $B'B''$ два раза· одинъ разъ—двигаясь отъ B' къ B'', другой разъ — двигаясь обратно; оба раза работа внутреннихъ силъ будетъ численно одна и та же, но по знаку различна, такъ что сумма обѣихъ работъ будетъ равна нулю. То же самое справедливо и для всѣхъ другихъ частей пути точки; всѣ онѣ будутъ пройдены точкою по два раза при чемъ направленіе ея дви-

*) Въ дѣйствительности эта сила идетъ по AB

женія въ первый разъ будетъ противно направленію движенія второго раза. Слѣдовательно, полная сумма работъ внутренней силы отъ начальнаго положенія точки до того момента, когда она опять придетъ въ это положеніе, равна нулю.

Это, очевидно, справедливо и для того случая, когда точекъ не двѣ а больше. Слѣдовательно, доказанное положеніе справедливо для всякой системы точекъ.

Такимъ образомъ, работа внутреннихъ силъ въ теченіе промежутка времени, по прошествіи котораго точки тѣла приходятъ въ первоначальное положеніе, равна нулю, а слѣдовательно, для такихъ перемѣщеній приращеніе живой силы всего тѣла будетъ равняться только работѣ внѣшнихъ силъ.

Отсюда заключаемъ: если внѣшнія силы на систему точекъ не дѣйствуютъ, то живая сила системы при возвращеніи ея въ первоначальное положеніе приметъ прежнее значеніе.

§ 225. Выводъ условій равновѣсія силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу на основаніи закона живыхъ силъ. Начало возможныхъ перемѣщеній.

Пусть система силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, удовлетворяетъ условіямъ сохраненія движенія центра инерціи (у-ніе 143 § 204), т. е.

$$\sum X_e = 0 \quad \sum Y_e = 0 \quad \sum Z_e = 0$$

Пусть затѣмъ тѣло, находившееся въ покоѣ, при дѣйствіи какой либо другой системы силъ совершитъ поступательное перемѣщеніе Δs. Работа разсматриваемой нами (первой) системы силъ при этомъ перемѣщеніи будетъ равна (§ 222)

$$\Delta T = \Delta s \sum R_e \cos (R_e \Delta s) \qquad (175)$$

гдѣ R_e — равнодѣйствующая внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ какой-либо точкѣ тѣла.

Такъ какъ сумма проекцій всѣхъ силъ данной системы, согласно предположенію, на любое направленіе равна нулю, т. е.

$$\sum R_e \cos (R_e \Delta s) = 0$$

то будетъ равна нулю и работа, произведенная этими силами, опредѣляемая выраженіемъ (175). Отсюда мы заключаемъ, что силы эти не могутъ сообщить тѣлу какого-либо поступательнаго перемѣщенія. Въ самомъ дѣлѣ, равнодѣйствующая всѣхъ силъ (внутреннихъ и внѣшнихъ), приложенныхъ къ каждой точкѣ тѣла, стремится передвинуть ее по своему направленію, слѣдовательно, работа этой силы будетъ во всякомъ случаѣ положительной. Таковы будутъ работы всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на тѣло, а значитъ сумма этихъ работъ будетъ во всякомъ случаѣ больше нуля; но такъ какъ работа внутреннихъ силъ въ твердомъ тѣлѣ всегда будетъ нулемъ (§ 143), то должна быть больше нуля сумма работъ внѣшнихъ силъ, а мы только что вывели, что она равна нулю, слѣдовательно, разсматриваемая система силъ при соблюденіи указанныхъ условій (162, § 216), не можетъ сообщить тѣлу поступательнаго перемѣщенія.

Если та же система силъ удовлетворяетъ еще второму условію (163, § 217), по которому сумма моментовъ силъ этой системы относительно каждой изъ трехъ взаимноперпендикулярныхъ осей равна нулю, то такая система силъ не сообщитъ тѣлу и вращенія. Дѣйствительно, работа при вращеніи тѣла около данной оси выражается такъ (уравненіе 173):

$$\Delta\varphi \sum_{1}^{k} M_i$$

Но по условію сумма моментовъ взятой системы силъ равна нулю, слѣдовательно, отъ этой системы вращенія тѣла ожидать нельзя.

Такъ какъ всякое движеніе твердаго тѣла приводится въ общемъ случаѣ къ совокупности поступанія и вращенія, то если данная система внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ тѣлу, не можетъ сообщить послѣднему ни поступанія, ни вращенія, она не можетъ измѣнить состоянія тѣла, а слѣдовательно, силы этой системы находятся въ равновѣсіи. Для этого онѣ должны удовлетворять какъ только что было показано, условіямъ равновѣсія, выражаемымъ найденными выше уравненіями равновѣсія (164 и 165).

Оба эти уравненія были въ настоящемъ случаѣ получены изъ общаго выраженія закона живыхъ силъ для твердаго тѣла примѣненіемъ его послѣдовательно къ поступанію и вращенію, а потому уравненіе живыхъ силъ въ томъ случаѣ, когда сумма работъ внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, для всѣхъ возможныхъ перемѣщеній равна нулю, выражаетъ собою общее условіе равновѣсія такихъ силъ.

ГЛАВА XXVI.

Законъ сохраненія энергіи

§ 226 Выводъ закона сохраненія энергіи

Законъ живыхъ силъ въ примѣненіи къ системѣ матерьяльныхъ точекъ, какъ было найдено выражается слѣдующимъ образомъ:

$$\sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} = \sum T_e + \sum T_i$$

гдѣ T_e — обозначаетъ работу внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ какой-либо точкѣ системы, а T_i работу силъ внутреннихъ, при чемъ суммированіе распространяется по всѣмъ точкамъ системы.

Допустимъ, что на разсматриваемую нами систему точекъ внѣшнія силы не дѣйствуютъ. Въ такомъ случаѣ

$$\sum T_e = 0$$

и законъ живыхъ силъ для системы, подверженной только внутреннимъ силамъ пріобрѣтаетъ слѣдующую форму

$$\sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} = \sum T_i.$$

Каждому состоянію системы отвѣчаетъ опредѣленная живая сила могущая измѣняться, вообще говоря, въ ту или другую сторону. Эта живая сила для нѣкотораго положенія системы точекъ будетъ имѣть наибольшую величину.

Такое положеніе можетъ быть впрочемъ вполнѣ условнымъ, такъ напр при паденіи тяжелаго тѣла на землю скорость его, а слѣдовательно, и живая сила постепенно возрастаютъ по мѣрѣ приближенія къ землѣ. Если бы тѣло могло продолжать двигаться по отвѣсной линіи и ниже земной поверхности, то скорость его, а также живая сила продолжали бы постепенно возрастать. Мы можемъ однако взять за положеніе тѣла, въ которомъ оно будетъ обладать наибольшей живой силой, положеніе его на земной поверхности въ томъ случаѣ, если дальнѣйшее движеніе тѣла мы въ данномъ вопросѣ разсматривать не будемъ.

Примемъ для обозначенія скоростей частицъ тѣла въ положеніи, отвѣчающемъ наибольшей живой силѣ, букву V; сумма работъ внутреннихъ силъ системы (ΣT_i) при переходѣ ея изъ нѣкотораго положенія, которому будутъ соотвѣтствовать скорости v_1, въ положенія, которому будутъ соотвѣтствовать скорости V, найдется при помощи приведеннаго уравненія, а именно.

$$\sum \frac{mV^2}{2} - \sum \frac{mv_1^2}{2} = \sum T_{i_1},$$

Такимъ же образомъ при переходѣ системы изъ какого либо другого положенія (v_2) въ положеніе максимальной живой силы работа внутреннихъ силъ будетъ равна

$$\sum \frac{mV^2}{2} - \sum \frac{mv_2^2}{2} = \sum T_{i_2}$$

и т. д.

Изъ этихъ уравненій получаемъ

$$\sum \frac{mV^2}{2} = \sum \frac{mv_1^2}{2} + \sum T_{i_1}$$

$$\sum \frac{mV^2}{2} = \sum \frac{mv_2^2}{2} + \sum T_{i_2}$$

Отсюда имѣемъ.

$$\sum \frac{mv_1^2}{2} + \sum T_{i_1} = \sum \frac{mv_2^2}{2} + \sum T_{i_2} = \ldots$$

т. е. для всякаго положенія системы точекъ, на которую дѣйствуютъ только внутреннія силы, сумма живой силы и работы внутреннихъ силъ требующейся для перевода системы въ положеніе, которому соотвѣтствуетъ наибольшая живая сила, есть величина постоянная.

Работа внутреннихъ силъ и живая сила дополняютъ другъ друга, при чемъ, если мы предположимъ систему въ томъ положеніи, когда скорости всѣхъ точекъ равны нулю, то работа, которую должны затратить внутреннія силы для приведенія системы въ положеніе V будетъ наибольшей; работа эта будетъ расходоваться по мѣрѣ того, какъ система приближается къ положенію (V), превращаясь въ живую силу. Такимъ образомъ наибольшая живая сила представляетъ собою мѣру израсходованной внутренними силами работы при переходѣ системы отъ положенія, гдѣ живая сила равна нулю къ положенію съ наибольшей живой силой. Разности же:

$$\left(\sum \frac{mV^2}{2} - \sum \frac{mv_1^2}{2}\right) \text{ или } \left(\sum \frac{mV^2}{2} - \sum \frac{mv_2^2}{2}\right) \text{ и т. д.}$$

выражаютъ тѣ количества живой силы, которыя точки системы должны получить для перехода въ положеніе (V), при чемъ количества эти будутъ доставлены за счетъ работы внутреннихъ силъ. Но такъ какъ внутреннія силы представляютъ собою силы взаимодѣйствія между точками системы, то сама система должна быть въ состояніи израсходовать эту работу, иначе говоря, она должна обладать способностью произвести эту работу, имѣть въ запасѣ это количество работы.

Мы видимъ такимъ образомъ, что вся разница между живой силой системы и работой внутреннихъ силъ, или какъ можно теперь сказать, **запасомъ работы внутреннихъ силъ** соотвѣтствующими опредѣленному положенію системы точекъ, состоитъ только въ томъ, что живая сила есть работа, уже совершенная силами, израсходованная ими, запасъ же работы есть работа, которую внутреннія силы въ состояніи (соотвѣтственно данному положенію системы) или которую онѣ должны израсходовать для перевода точекъ системы въ положеніе, отвѣчающее наибольшей живой силѣ

Итакъ, по существу дѣла живая сила и запасъ работы однородны между собою, первая есть работа уже израсходованная, вторая — могущая быть израсходованной, при чемъ при расходованіи и будетъ происходить преобразованіе ея въ живую силу. Вслѣдствіе этого обѣимъ величинамъ вполнѣ умѣстно придать одно общее наименованіе. Называя способность тѣла произвести работу **энергіей**, говорятъ, что въ каждомъ положеніи система точекъ, обладая живой силой, обладаетъ вмѣстѣ съ тѣмъ **энергіей движенія** или **кинетической энергіей** (дѣйствительной, дѣйствующей) и сверхъ того имѣетъ запасъ работы внутреннихъ силъ, могущій развить опредѣленное количество кинетической энергіи. Этотъ запасъ работы называютъ **энергіей положенія** или **потенціальной энергіей** (возможной, запасной). Сумму же энергіи кинетической и потенціальной называютъ **полной энергіей системы**. Обозначая ихъ соотвѣтственно буквами K, Π и $Э$, можемъ **законъ сохраненія энергіи** выразить въ слѣдующемъ общемъ видѣ:

$$K + \Pi = Э = Const \tag{176}$$

Итакъ, полная энергія системы, находящейся подъ дѣйствіемъ только внутреннихъ силъ остается постоянной при движеніи системы, совершающемся подъ дѣйствіемъ внутреннихъ силъ, происходитъ только преобразованіе энергіи

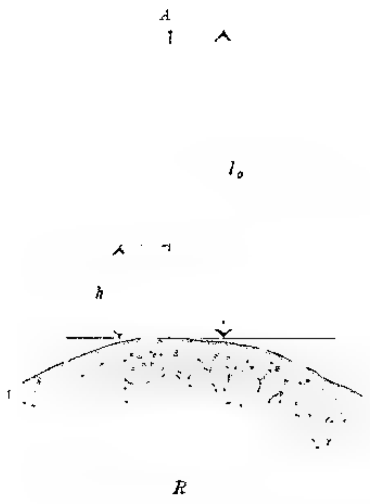
Пояснимъ на примѣрахъ справедливость закона сохраненія энергіи

§ 227. Матерьяльная точка, предоставленная самой себѣ.

Такая точка, имѣя опредѣленную начальную скорость и сохраняя ее будетъ двигаться прямолинейно и равномѣрно; слѣдовательно и живая сила или кинетическая энергія ея, равная полной энергіи точки, будеть оставаться постоянной.

§ 223. Паденіе тѣлъ.

Положимъ, что имѣемъ тѣло вѣсомъ p, находящееся на нѣкоторомъ удаленіи h_0 отъ поверхности земли (фиг. 175). Между тѣломъ и землей существуютъ внутреннія силы притяженія, величина которыхъ въ каждое мгновеніе измѣряется вѣсомъ тѣла и которыя подчиняются закону Ньютона, т. е. силы эти обратно пропорціональны квадратамъ разстояній между тѣломъ и центромъ земного шара. Но ввиду того, что удаленіе тѣла отъ центра земли сравнительно съ величиной самыхъ перемѣщеній очень велико, мы величины этихъ силъ, т. е. вѣсъ тѣла, можемъ считать постоянными. Сверхъ того желая повѣрить законъ сохраненія энергіи въ случаѣ паденія тѣлъ и примѣняя его къ системѣ, состоящей изъ падающаго тѣла и земли, мы, разсматривая перемѣщеніе тѣла относительно земли, можемъ считать послѣднюю неподвижной *), а въ такомъ случаѣ намъ достаточно будетъ вычислить лишь работу силы, приложенной къ тѣлу, т. е. работу вѣса его.



175

Итакъ пусть тѣло, находившееся въ покоѣ на растояніи h_0 отъ поверхности земли, приближается къ ней на разстояніе h, т. е. проходитъ разстояніе $(h_0 - h)$.

Найдемъ полную энергію тѣла (состоящую изъ кинетической—K и потенціальной Π) для обѣихъ положеній его. Въ началѣ движенія скорость тѣла равна нулю, а потому $K_0 = 0$, въ то же время $\Pi_0 = ph_0$.

Въ положеніи на разстояніи h отъ земли потенціальная энергія тѣла равна ph, кинетическая же $\frac{mv^2}{2}$, гдѣ v есть скорость, соотвѣт-

*) Въ самомъ дѣлѣ, если элементарныя перемѣщенія тѣла и земли будуть соотвѣтственно $\Delta_1 s$ и $\Delta_2 s$, то работы, совершенныя силами, къ нимъ приложенными и равными между собою, будутъ $p\Delta_1 s$ и $p\Delta_2 s$. Сумма работъ силъ равна $p(\Delta_1 s + \Delta_2 s)$ или $p\Delta s$, гдѣ Δs—перемѣщеніе тѣла относительно земли.

ствующая высотѣ $(h_0 - h)$ и потому равная (§ 102)

$$= \sqrt{2g(h_0 - h)}$$

Имѣемъ слѣдовательно:

$$K_0 + \Pi_0 = K + \Pi$$

$$0 + ph_0 = \frac{m}{2} 2g(h_0 - h) + ph = p(h_0 - h) + ph = ph_0$$

т. е. полная энергія тѣла остается постоянной.

Не трудно повѣрить законъ сохраненія энергіи въ слѣдующихъ случаяхъ.

1. Тѣло движется внизъ съ нѣкоторой начальной скоростью v_0.

2. Тѣло брошено вверхъ со скоростью v_0.

3. Тѣло брошено наклонно къ горизонту.

§ 229. Движеніе тѣла по наклонной плоскости.

Въ данномъ случаѣ разсматриваемая система опять состоитъ изъ земли и тѣла. Но тѣло кромѣ вѣса подвержено еще реакціи наклонной плоскости. Такъ какъ реакція эта всегда перпендикулярна къ направленію движенія тѣла, то работа ея равна нулю. Остается, слѣдовательно, по прежнему разсматривать только работу вѣса. А въ отношеніи этой силы мы знаемъ, что какъ бы тѣло ни двигалось, работа силы тяжести равна произведенію вѣса тѣла на пониженіе (вертикальное) центра тяжести тѣла (§ 164), а потому приходимъ къ разсмотрѣнному выше случаю свободнаго паденія тѣла, когда законъ сохраненія энергіи оказался справедливымъ.

§ 230. Вселенная.

Если разсматриваемая нами система обнимаетъ весь міръ, то въ ней существуютъ только внутреннія силы, а потому въ этомъ случаѣ законъ сохраненія энергіи находитъ примѣненіе. Мы можемъ сказать, что количество энергіи вселенной остается постояннымъ. Всѣ явленія, совершающіяся въ природѣ, представляютъ только переходъ энергіи изъ одного мѣста въ другое или изъ одного вида въ другой: изъ потенціальной въ кинетическую или наоборотъ. Энергія, какъ и вещество, не творится въ мірѣ вновь и не пропадаетъ.

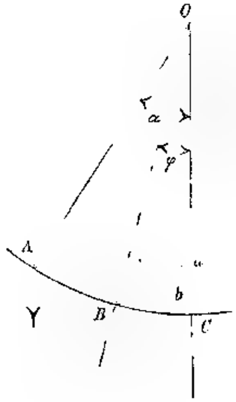
§ 231. Примѣненіе закона сохраненія энергіи къ рѣшенію нѣкоторыхъ вопросовъ.

1. Примѣняя законъ сохраненія энергіи, не трудно показать, что скорость тѣла, брошеннаго вверхъ, при возвращеніи его въ точку бросанія должна быть равна начальной.

2. Не трудно найти скорость маятника, основываясь при этомъ на законѣ сохраненія энергіи. Тяжелая точка маятника находится подъ дѣйствіемъ двухъ силъ: силы тяжести и натяженія нити но

работа послѣдней, какъ направленной перпендикулярно къ перемѣщенію точки, всегда равна нулю, а потому остается разсмотрѣть только работу вѣса p точки (фиг. 176).

Если маятникъ приходитъ въ движеніе изъ точки A, не имѣя начальной скорости, то живая сила его въ точкѣ B будетъ равна работѣ вѣса его, т. е.



176

$$\frac{mv_B^2}{2} = p \cdot ab = mg \cdot ab$$

откуда

$$v_B = \sqrt{2g \cdot ab}$$

но

$$ab = aC - bC,$$

$$aC = OC - Oa = l - l\cos\alpha$$

$$bC = OC - Ob = l - l\cos\varphi$$

$$ab = l\cos\varphi - l\cos\alpha = l(\cos\varphi - \cos\alpha),$$

а потому, подобно найденному въ § 180,

$$v_B = \sqrt{2gl(\cos\varphi - \cos\alpha)}$$

3. Такъ какъ количество потенціальной энергіи, заключающейся въ тѣлѣ, зависитъ отъ его превышенія надъ данной горизонтальной плоскостью, то на основаніи закона сохраненія энергіи не трудно показать, въ какомъ отношеніи будутъ находиться усилія, движущія тяжелое тѣло по вертикали и по наклонной плоскости безъ тренія (§ 181).

§ 232. Кажущіяся противорѣчія закону сохраненія энергіи.

Нѣкоторыя явленія, встрѣчающіяся въ природѣ, кажутся противорѣчащими закону сохраненія энергіи; однако каждый разъ не трудно убѣдиться въ томъ, что противорѣчія эти только кажущіяся и что наоборотъ онѣ позволяютъ дать закону этому болѣе обширное примѣненіе и болѣе широкое толкованіе.

Для поясненія сказаннаго приведемъ нѣсколько примѣровъ и затѣмъ постараемся объяснить ихъ.

1. Пусть имѣемъ ось съ маховымъ колесомъ, вращающуюся въ подшипникахъ. Сообщимъ колесу нѣкоторую скорость и затѣмъ предоставимъ его самому себѣ. По прошествіи нѣкотораго времени колесо остановится вслѣдствіе тренія, какъ обыкновенно говорятъ. При этомъ всѣ части нашей системы будутъ находиться въ томъ же самомъ положеніи, какъ въ то мгновеніе, когда система была предоставлена самой себѣ; слѣдовательно, работа внутреннихъ силъ для разсмотрѣннаго періода равна нулю; работа внѣшнихъ силъ также

равна нулю, а потому живая сила системы должна быть та же, что и въ началѣ періода. Между тѣмъ ось остановилась и живая сила равна нулю.

2. Поставимъ тяжелую повозку на горизонтальную плоскость и передвинемъ ее по плоскости на нѣкоторую длину s; окажется, что для этого надо употребить извѣстное среднее усиліе P и произвести работу Ps. Въ окончательномъ положеніи повозки разстоянія частицъ ея отъ плоскости, а также отъ центра земли тѣ же, что и въ началѣ, поэтому работа внутреннихъ силъ для полнаго перемѣщенія повозки равна нулю. Работа внѣшнихъ силъ, равная Ps, должна была бы увеличить живую силу повозки; между тѣмъ оказывается что повозка стоитъ неподвижно; слѣдовательно, пріобрѣтенная ею живая сила равна нулю.

3. Камень, опущенный съ нѣкоторой высоты и упавшій на землю, теряетъ свою скорость, а съ этимъ и всю кинетическую энергію, пріобрѣтенную во время паденія за счетъ энергіи потенціальной. Такимъ образомъ и здѣсь наблюдается исчезновеніе живой силы подобно предыдущимъ примѣрамъ

§ 233. Объясненіе кажущихся нарушеній закона сохраненія энергіи Теплота —видъ энергіи. Механическій эквивалентъ теплоты

При болѣе внимательномъ разсмотрѣніи оказывается, что видимое исчезновеніе живой силы сопровождается повышеніемъ температуры тѣлъ, прекратившихъ свое движеніе, и слѣдовательно выдѣленіемъ тепла.

Опыты, произведенные Джоулемъ, показали, что количество выдѣляющагося при этомъ тепла пропорціонально потерѣ живой силы. Подобное обстоятельство и заставляетъ сдѣлать выводъ, что въ приведенныхъ примѣрахъ энергія не исчезаетъ а только принимаетъ другую форму; происходитъ превращеніе энергіи видимаго движенія въ энергію тепловую, энергію движеній невидимыхъ, въ колебательную энергію молекулъ Слѣдовательно если мы тѣлу сообщаемъ извѣстное количество тепла, то этимъ мы увеличиваемъ скорость тепловыхъ движеній, что обнаруживается повышеніемъ температуры.

Упомянутые опыты, позволили опредѣлить соотношеніе между количествами затрачиваемой живой силы или работы и получаемой взамѣнъ ея теплоты, а именно, для того чтобы получить количество теплоты, необходимое для нагрѣванія одного килограма воды на 1° Ц или одну калорію, нужно затратить 428 кгр м работы.

Количество это называется механическимъ эквивалентомъ теплоты.

§ 234. Обобщеніе закона сохраненія энергіи.

Какъ мы видѣли изъ изложеннаго въ настоящей главѣ, законъ сохраненія энергіи можетъ быть выведенъ теоретически для системъ точекъ, подверженныхъ дѣйствію внутреннихъ силъ, а также какъ это будетъ показано далѣе, для силъ потенціальныхъ.

Но этимъ кругъ примѣненія закона сохраненія энергіи не ограничивается; его распространяютъ и на другія явленія природы, причемъ эквивалентность различныхъ видовъ энергіи находитъ уже опытное подтвержденіе. Опытами устанавливаются соотношенія между различными видами энергіи, опредѣляющія количество энергіи даннаго рода, эквивалентное энергіи другого рода. Справедливость подобнаго взгляда подтверждается совпаденіемъ всѣхъ выводовъ, сдѣланныхъ на основаніи такихъ предположеній, съ дѣйствительными явленіями окружающей жизни

Вслѣдствіе сказаннаго законъ сохраненія энергіи въ самой общей формѣ можетъ быть высказанъ такъ: количество энергіи во всѣхъ ея видахъ, взятое въ совокупности, въ мірѣ постоянно.

Явленія окружающаго міра, разсматриваемыя съ этой точки зрѣнія, сводятся къ слѣдующимъ двумъ видамъ:

1. Переходу энергіи опредѣленнаго рода изъ одного мѣста въ другое (движеніе или теченіе энергіи) и

2. превращенію одной энергіи въ другую.

При этомъ переходъ и превращеніе могутъ происходить одновременно *).

§ 235. Perpetuum mobile.

Идея perpetuum mobile (вѣчное движеніе) состоитъ въ построеніи такого механизма, который могъ бы вѣчно доставлять работу, не требуя въ то же время для своего движенія соотвѣтствующихъ затратъ энергіи извнѣ. Припоминая найденное выше уравненіе (§ 221)

$$T = \sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2},$$

мы видимъ, что полученіе работы отъ данной системы возможно лишь при соотвѣтственномъ уменьшеніи ея живой силы При условіи дѣйствовать вѣчно въ системѣ точекъ должно заключаться без

*) Дальнѣйшія свѣдѣнія по затронутому вопросу, слагающіяся въ настоящее время въ особую науку, извѣстную подъ названіемъ энергетики, можно найти въ слѣдующихъ сочиненіяхъ.

W. Ostwald. Studien zur Energetik. 1892.

G. Helm Die Lehre von der Energie. 1887.

В. Лебединскій Элементарное ученіе объ энергіи. Спб. 1904.

С. Бадинъ. Энергетическій токъ и его приложенія. Инженерный журнал 1902 г., № 8.

конечнобольшое количество живой силы. Указанное рѣшеніе вопроса представляется, очевидно, неосуществимымъ. Машина могла бы отдавать въ видѣ работы потенціальную энергію своихъ частей, но такой энергіи въ ней также должно было бы быть безконечнобольшое количество.

Различные механизмы, долженствовавшіе осуществить идею perpetuum mobile, представляютъ системы съ періодическимъ возвращеніемъ своихъ частей въ начальное состояніе по совершеніи одного періода или цикла. Но легко видѣть, что такая система въ лучшемъ случаѣ совсѣмъ не доставитъ работы, такъ какъ при возвращеніи въ первоначальное положеніе живая сила ея получитъ и первоначальное значеніе, а слѣдовательно разность живыхъ силъ, которая должна была бы выразиться въ видѣ доставляемой машиною работы, будетъ нулемъ. Если же мы примемъ во вниманіе то, что дѣйствительныя машины, даже не доставляя совсѣмъ полезной энергіи, требуютъ затраты ея въ той или другой формѣ для возмѣщенія энергіи вслѣдствіе присутствія въ машинахъ такъ называемыхъ вредныхъ сопротивленій, каковы тренія разнаго рода, сопротивленіе воздуха, удары и т. п., то мы придемъ къ выводу о невозможности осуществленія perpetuum mobile при основномъ условіи отсутствія затратъ энергіи для достиженія этой цѣли; возможность же устройства разсматриваемаго механизма явилась бы опровerженіемъ закона сохраненія энергіи.

§ 236. Роль машинъ въ преобразованіи и передачѣ энергіи.

Все изложенное выше приводитъ насъ къ заключенію, что различнаго рода машины, употребляемыя въ техническихъ производствахъ, или только преобразуютъ энергію изъ одного вида въ другой, или перемѣщаютъ (передаютъ) ее изъ одного мѣста въ другое; при этомъ указанный процессъ совершается такимъ образомъ, что въ результатѣ преобразованія мы располагаемъ лишь частью того количества энергіи, которое нами было израсходовано для дѣйствія данной машины. Раціональность происходящихъ при преобразованіи и передачѣ энергіи безполезныхъ затратъ послѣдней обусловливается соображеніями, уже выходящими за рамки теоретической механики и составляющими предметъ наукъ экономическихъ; изученіе же средствъ, позволяющихъ тѣмъ или другимъ способомъ наиболѣе выгодно осуществлять указанныя преобразованіе и передачу энергіи, входитъ въ кругъ различныхъ отдѣловъ прикладной механики.

§ 237. Задачи.

1. Тѣло вѣсомъ 20 кгр. брошено вверхъ со скоростью 40 м./сек. Повѣрить законъ сохраненія энергіи для полной высоты подъема, половины ея и точки бросанія?

2. Сколько кгр. м. работы можетъ быть получено при затратѣ 100 калорій?

3. Найти число кгр. м. работы, которую доставитъ машина, имѣющая коефиціентъ полезнаго дѣйствія 0,6, при затратѣ 90 калорій? *)

4. Въ паровомъ котлѣ сжигаютъ въ часъ 30 кгр. угля съ теплотворной способностью 7000 кал. **). Найти число лошадиныхъ силъ, которое доставляетъ паровая машина, если коефиціенты полезнаго дѣйствія котла и машины соотвѣтственно равны 0,7 и 0,1?

Рѣшенія задачъ.

1. См. § 228.

2. $428 \cdot 100 = 42800$ кгр. м.

3. $90 \cdot 428 \cdot 0{,}6 = 23112$.

4. Количество тепловой энергіи, получаемой машиной въ часъ, равно: $30 \cdot 7000 \cdot 0{,}7$ кал. Количество полезной энергіи, доставляемое машиной въ часъ, составляетъ $30 \cdot 7000 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 \cdot 428$ кгр. м. То же количество энергіи въ секунду или мощность машины въ кгр. м./сек. будетъ равна:

$$\frac{30 \cdot 7000 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 \cdot 428}{60^2} =$$

$$= \frac{30 \cdot 7000 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 \cdot 428}{60^2 \cdot 75} = 23{,}3 \text{ лош. силъ.}$$

---

*) Коефиціентомъ полезнаго дѣйствія машины называютъ отношеніе между полезной мощностью, развиваемой машиной, и мощностью, необходимой для дѣйствія машины. При постоянствѣ обѣихъ мощностей можно брать отношеніе между соотвѣтствующими количествами энергіи.

**) Теплотворной способностью топлива наз. количество единицъ теплоты (калорій), развиваемое при совершенномъ сжиганіи 1 кгр. топлива.

ГЛАВА XXVII

Центральныя силы и силовыя поля

§ 238. Понятіе о центральныхъ силахъ

Подъ именемъ центральныхъ силъ разумѣютъ силы, сообщающія матерьяльной точкѣ, къ которой онѣ приложены, ускоренія, направленныя черезъ опредѣленную точку въ пространствѣ, называемую центромъ силъ, при чемъ величины ускореній суть функціи разстояній матерьяльной точки отъ центра. Таковы напр. силы притяженія между матерьяльными частицами, силы притяженія или отталкиванія между двумя магнитными или электрическими массами.

Каждая изъ силъ, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ, можетъ имѣть свой центръ при чемъ величина силы выражается прямолинейнымъ отрѣзкомъ соотвѣтствующей длины, направленнымъ по прямой, проходящей черезъ разсматриваемую точку и центръ данной силы.

Мы разсмотримъ первоначально тотъ случай дѣйствія центральныхъ силъ, когда имѣется одинъ центръ силъ.

Всякая сила, дѣйствующая на разсматриваемую матерьяльную точку, выражаетъ собою дѣйствіе на нее какой либо другой матерьяльной точки, такъ какъ въ разбираемомъ нами случаѣ мы предположили, что силы, приложенныя къ данной точкѣ, проходятъ всегда черезъ опредѣленный центръ, то остается представить себѣ, что въ послѣднемъ расположена нѣкоторая масса m. Если массу движущейся точки обозначимъ черезъ m', то величина приложенной къ ней силы F, вызываемой присутствіемъ точки съ массой m, выражается такъ:

$$F = kmm' f(r), \qquad (177)$$

т. е. сила эта, будучи функцей разстоянія, будетъ въ то же время пропорціональна произведенію массъ обѣихъ точекъ при чемъ k коэфиціентъ пропорціональности *).

*) На основаніи начала противодѣйствія точно такой же величины сила будетъ дѣйствовать и на центръ силъ и будетъ стремиться перемѣстить его, но нами введено предположеніе о неподвижности послѣдняго

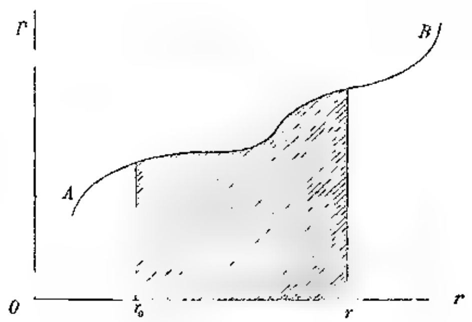
Нашей первой цѣлью будетъ вывести общее выраженіе работы центральныхъ силъ, при чемъ для упрощенія изложенія будемъ разсматривать движеніе матерьяльной точки съ массой равной единицѣ, т. е. положимъ $m' = 1$, тогда величина приложенной къ точкѣ силы будетъ такова:

$$F = km f(r) \qquad (178)$$

Выводимая ниже формула для опредѣленія работы будетъ пригодно и для точки, имѣющей массу произвольной величины; послѣднюю придется лишь ввести множителемъ какъ въ выраженіе для величины центральныхъ силъ, такъ и въ выраженіе для работы ихъ.

§ 239. Работа центральныхъ силъ при перемѣщеніи точки по направленію силъ.

Если данная точка, имѣющая массу равную единицѣ, въ началѣ разсматриваемаго перемѣщенія находится въ покоѣ или имѣетъ скорость, направленіе которой проходитъ черезъ центръ силъ, то подъ дѣйствіемъ центральныхъ силъ точка будетъ перемѣщаться прямолинейно, при чемъ направленіе перемѣщенія будетъ совпадать съ направленіемъ силы, приложенной къ точкѣ. Работу такой силы при перемѣщеніи точки съ разстоянія r_0 отъ центра на разстояніе r отъ него мы найдемъ изъ общаго выраженія (§ 157):



177

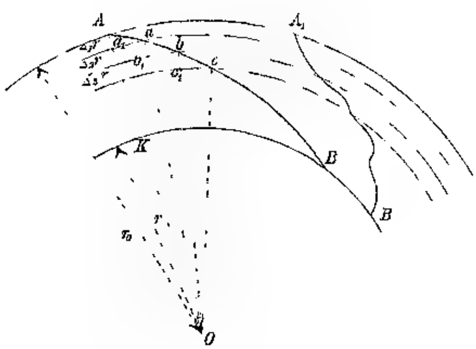
$$T = \text{пр} \sum_{r_0}^{r} F\,\Delta r = \text{пр} \sum_{0} km\,f(r)\,\Delta r = km\ \text{пр} \sum_{r_0} f(r)\,\Delta r \qquad (179)$$

Если бы зависимость (178) F отъ r была дана графически напр. кривою AB (фиг. 177), то искомая работа при перемѣщеніи точки съ разстоянія r_0 на разстояніе r отъ центра выразилась бы заштрихованною площадью (§ 157).

§ 240. Работа центральныхъ силъ при произвольномъ перемѣщеніи точки.

Пусть точка съ массой, равной единицѣ, находящаяся въ A перемѣщается на конечное разстояніе по какой либо кривой (вообще говоря двоякой кривизны) въ положеніе B (фиг. 178); O — центръ силъ. Криволинейный путь подъ дѣйствіемъ центральныхъ силъ точка опишетъ въ томъ случаѣ, когда она, находясь въ A, обладаетъ нѣкоторой скоростью, не совпадающей по направленію съ линіей OA. Видъ кривой AB будетъ при этомъ зависѣть какъ отъ величины и направленія скорости, такъ и отъ вида той функціи, которой выражаются центральныя силы въ зависимости отъ разстоянія точки до центра.

Разложимъ перемѣщеніе AB на i элементарныхъ перемѣщеній Aa, ab, bc ... на столько малыхъ, чтобы ихъ можно было считать прямолинейными, величину же центральной силы на протяженіи каждаго изъ нихъ постоянной. Вычислимъ элементарную работу центральныхъ силъ на протяженіи перваго изъ этихъ перемѣщеній, предполагая, что силы взаимодѣйствія между движущейся точкой и центромъ суть силы притяженія.



178

Соединимъ точку A съ центромъ радіальной прямой AO и проведемъ черезъ точки A и a шаровыя поверхности, съ которыми линія AO пересѣчется въ точкахъ A и a_1. Дѣйствительное перемѣщеніе точки Aa можетъ быть разложено на два составляющихъ перемѣщенія: Aa_1 по направленію силы, приложенной къ точкѣ, когда она находится въ A, и a_1a—совпадающее съ шаровой поверхностью, проведенной черезъ a; послѣднее перемѣщеніе, которому мы можемъ придать тотъ или другой видъ, проще всего можетъ быть представлено дугою большого круга, проходящаго черезъ точки a_1 и a.

Въ § 162 было доказано, что работа какой-либо силы при составномъ перемѣщеніи точки равна суммѣ работъ той же силы при перемѣщеніяхъ составляющихъ. Въ данномъ случаѣ, обозначая работу при перемѣщеніи точки изъ A въ a черезъ $\Delta_1 T$, а силу черезъ F_1, получимъ:

$$\Delta_1 T = F_1 \cdot Aa \cos(F_1, Aa) = F_1 \cdot Aa_1 \cos(F_1, Aa_1) + F_1 \cdot a_1a \cos(F_1, a_1a)$$

Въ этомъ выраженіи

$$\cos(F_1, Aa_1) = 1$$

такъ какъ направленіе силы совпадаетъ съ направленіемъ перемѣщенія *) и

$$\cos(F_1, a_1a) = 0,$$

такъ какъ сила, будучи направлена по радіусу даннаго шара, будетъ всегда перпендикулярна къ поверхности его въ любой точкѣ, а слѣдовательно, будетъ перпендикулярна и къ пути перемѣщенія въ каждой точкѣ послѣдняго. Итакъ находимъ:

$$\Delta T = F_1\, \Delta a_1.$$

Подобнымъ же образомъ для остальныхъ элементарныхъ перемѣщеній найдемъ:

$$\Delta_2 T = F_2\, ab = F_2\, a_1a_2$$
$$\Delta_3 T = F_3\, bc = F_3\, a_2a_3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Или обозначая элементы A_1a, a_1a_2, a_2a_3 ..., на которые подраздѣляется отрѣзокъ радіуса проведеннаго черезъ начальную точку перемѣщенія, соотвѣтственно черезъ $\Delta_1 r$, $\Delta_2 r$, $\Delta_3 r$ ... $\Delta_n r$, будемъ имѣть:

$$\Delta_1 T = F_1\Delta_1 r,$$
$$\Delta_2 T = F_2\Delta_2 r,$$
$$\Delta_3 T = F_3\Delta_3 r,$$
$$\cdots$$

Суммируя элементарныя работы и беря предѣлъ суммы при подведеніи всѣхъ элементовъ разстоянія къ нулю, найдемъ работу центральныхъ силъ при конечномъ перемѣщеніи массы по AB:

$$T_{AB} = \text{пр} \sum_{r}^{r} \Delta T = \text{пр} \sum_{r_0}^{r} F\Delta r$$

или, вводя вмѣсто F величину ея въ функціи отъ r (178) получимъ:

$$T_{AB} = \text{пр} \sum_{r_0} km\, f(r)\, \Delta r = km\ \text{пр} \sum^{r} f(r)\, \Delta r \qquad (180)$$

Изъ этого выраженія видимъ, что по какой бы кривой не перемѣщалась точка m, но если начальное и конечное разстоянія ея отъ центра будутъ въ различныхъ перемѣщеніяхъ AB, A_1B_1,... (фиг. 178) между собою соотвѣтственно равны, работа центральныхъ силъ будетъ одна и та же. Итакъ, работа центральныхъ силъ не зависитъ отъ вида и длины пути перемѣщающейся точки, а только отъ начальнаго и конечнаго разстояній ея отъ центра силъ.

*) Въ случаѣ силъ отталкивательныхъ косинусъ равнялся бы 1.

Работа эта такъ же, какъ и всякая другая работа для даннаго разстоянія не зависитъ отъ скорости, массы, времени перемѣщенія и т. д.

§ 241. Частные случаи работы центральныхъ силъ. Поверхности уровня.

Изъ доказанной теоремы непосредственно вытекаетъ слѣдующее: Если разстоянія движущейся точки отъ центра въ началѣ и концѣ перемѣщенія между собою равны или если въ частномъ случаѣ точка возвращается въ концѣ разсматриваемаго промежутка времени въ начальное положеніе, то работа силъ будетъ равна нулю.

Точно такъ же работа будетъ нулемъ, если точка, перемѣщаясь остается на одномъ и томъ же разстояніи отъ центра, т. е. перемѣщеніе совершается по шаровой поверхности, имѣющей центръ въ центрѣ силъ.

Въ послѣднемъ случаѣ всякая элементарная работа центральныхъ силъ будетъ равна нулю, такъ какъ направленія силы и перемѣщенія взаимноперпендикулярны. Въ любой точкѣ пространства, окружающаго центръ, центральная сила будетъ направлена по нормали къ шаровой поверхности проходящей черезъ взятую точку. Вслѣдствіе такого свойства шаровымъ поверхностямъ при условіи расположенія въ центрѣ ихъ дѣйствующей массы (центра силъ) присваиваютъ названіе **поверхностей уровня** по аналогіи съ какой либо покоющейся жидкостью, поверхность которой всегда нормальна къ направленію силы тяжести.

§ 242. Работа центральныхъ силъ при двухъ или нѣсколькихъ центрахъ.

Если разсматриваемая точка находится подъ дѣйствіемъ центральныхъ силъ, производимыхъ двумя или нѣсколькими центрами, то работу такихъ силъ найдемъ слѣдующимъ образомъ: Беря для простоты разсужденій случай двухъ центровъ, обозначимъ начальныя и конечныя разстоянія точки m отъ каждаго изъ центровъ m' и m'' соотвѣтственно черезъ r_0', r' и r_0'', r''. Тогда искомая работа равна алгебрической суммѣ работъ T' и T'', совершенныхъ центральными силами, принадлежащими каждому центру, т. е.

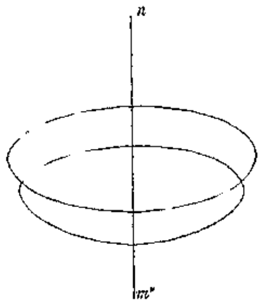
$$T' + T''$$

и выразится такъ

$$T = T' + T'' = \text{пр} \sum_{r_0'}^{r'} f_1(r)\,\Delta r + \text{пр} \sum_{r_0''}^{r''} f_2(r)\,\Delta r$$

Если разстоянія отъ каждаго изъ центровъ получатъ свои прежнія значенія, то каждая изъ работъ въ отдѣльности будетъ равна нулю, а слѣдовательно будетъ равна нулю и сумма обѣихъ работъ

Работа центральныхъ силъ, приложенныхъ къ разсматриваемой точкѣ, какъ мы видѣли, будетъ равна нулю и въ томъ случаѣ, если разстоянія ея отъ каждаго изъ центровъ остаются постоянными Въ данномъ случаѣ это будетъ тогда, когда точка перемѣщается по какой либо изъ окружностей (фиг. 179), имѣющихъ центръ на линіи, соединяющей центры силъ и лежащей въ плоскости, перпендикулярной къ этой линіи. Не трудно усмотрѣть, что работа центральныхъ силъ при произвольномъ перемѣщеніи по такой окружности будетъ равна нулю потому, что равнодѣйствующая силъ, находясь въ плоскости, проходящей черезъ данные центры и перемѣщающуюся точку, будетъ всегда перпендикулярна къ элементу пути, описываемому послѣдней.



179.

Въ болѣе общемъ случаѣ, когда мы имѣемъ нѣсколько центровъ видъ поверхностей, при движеніи по которымъ сумма работъ, производимыхъ центральными силами, будетъ для любого перемѣщенія равна нулю, будетъ, вообще говоря, зависѣть какъ отъ расположенія центровъ, такъ и отъ тѣхъ функцій, которыми выражаются величины центральныхъ силъ въ зависимости отъ разстояній ихъ до каждаго изъ центровъ. При этомъ работа силъ для любого перемѣщенія будетъ равна нулю, какъ указывалось, вслѣдствіе перпендикулярности равнодѣйствующей всѣхъ силъ, приложенныхъ къ движущейся точкѣ, къ траекторіи ея, лежащей на той и на другой поверхности. Поверхности эти такъ же, какъ и въ случаѣ одного центра, носятъ названіе поверхностей уровня

§ 243. Свойства поверхностей уровня

Поверхностямъ уровня принадлежатъ слѣдующія свойства.

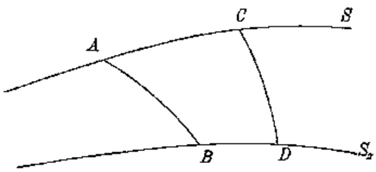
1. Равнодѣйствующая центральныхъ силъ, приложенныхъ къ движущейся точкѣ, перпендикулярна къ поверхности уровня

2. Работа центральныхъ силъ при перемѣщеніи точки по поверхности уровня всегда равна нулю

3. Работа центральныхъ силъ при перемѣщеніи точки съ одной поверхности уровня на другую будетъ всегда одна и та же независимо отъ вида пути, пройденнаго точкой. Дѣйствительно, пусть данная точка перемѣщается съ одной поверхности уровня S_1 на другую поверхность S_2 по линіи AB (фиг. 180). Работа центральныхъ силъ будетъ имѣть извѣстную величину въ зависимости отъ измѣненія разстоянія точки до каждаго изъ центровъ Представимъ себѣ теперь, что точка переходитъ изъ A въ B совершая путь $ACDB$ Такъ какъ

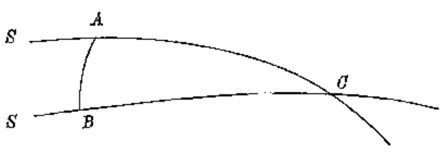
начальное и конечное положения точки будутъ соотвѣтственно тѣ же самыя, что и въ первомъ случаѣ, то работа центральныхъ силъ будетъ нулемъ (§ 240). Далѣе мы видимъ, что точка, перемѣщаясь изъ A въ C и изъ D въ B, двигалась по поверхностямъ уровня, а потому работа центральныхъ силъ была при этомъ равна нулю.

Отсюда мы заключаемъ, что работа при перемѣщеніи точки съ одной поверхности уровня на другую по CD равняется работѣ при перемѣщеніи по AB. То же самое можно доказать и для всякаго другого перемѣщенія, а потому мы можемъ сказать, что работа центральныхъ силъ при перемѣщеніи точки съ одной поверхности уровня на другую не зависитъ отъ пути перемѣщенія и отъ положеній конечныхъ точекъ перемѣщенія на поверхностяхъ.



180

4. Поверхности уровня не могутъ пересѣкаться между собою. Дѣйствительно, если бы мы допустили возможность встрѣчи поверхностей уровня S_1 и S_2 напр. въ C (фиг. 181), то могли бы перемѣстить какую либо точку изъ A въ B по пути ACB такъ, что работа центральныхъ силъ была бы нулемъ, такъ какъ вся траекторія лежала бы на поверхностяхъ уровня. Но работа при переходѣ точки съ одной поверхности уровня на другую нулемъ быть не можетъ, а имѣетъ опредѣленную величину, слѣдовательно, и поверхности уровня не могутъ встрѣчаться.



181

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію одного наиболѣе часто встрѣчающагося въ приложеніяхъ частнаго случая дѣйствія центральныхъ силъ, когда величины ихъ измѣняются обратно пропорціонально квадратамъ разстояній движущейся точки отъ центра.

§ 244. Центральныя силы, величины которыхъ обратно пропорціональны квадратамъ разстояній движущейся точки отъ центра.

Величина центральной силы, приложенной къ движущейся точкѣ съ массою m_1, находящейся на разстояніи r отъ центра, въ которомъ сосредоточена масса m, выражается въ разбираемомъ случаѣ слѣдующимъ образомъ

$$I = k\frac{mm_1}{r^2}.$$

Здѣсь k — коефиціентъ пропорціональности, величина котораго зависитъ отъ выбора единицы для измѣренія силъ при данныхъ единицахъ, служащихъ для измѣренія массъ и разстояній.

При соотвѣтственномъ выборѣ массъ можемъ положить $k = 1$ для чего въ абсолютной системѣ мѣръ за единицу массы слѣдуетъ взять такую массу, которая въ данной средѣ съ разстоянія въ одинъ сантиметръ притягиваетъ другую равную ей массу съ силою въ одну дину. Тогда формула пріобрѣтаетъ видъ:

$$I = \frac{mm_1}{r^2}. \tag{181}$$

Далѣе при опредѣленіи работы центральныхъ силъ мы будемъ разсматривать перемѣщеніе точки масса которой равна единицѣ т. е положимъ:

$$m_1 = 1$$

и слѣдовательно

$$I = \frac{m}{r^2} \tag{182}$$

Центральныя силы, величины которыхъ измѣняются обратно пропорціонально квадратамъ разстояній между массами называются **Ньютоновыми**, такъ какъ Ньютонъ первый указалъ эту зависимость въ примѣненіи къ силамъ притяженія и формула его имѣла видъ (182)

Впослѣдствіи Кулонъ (Coulomb) распространилъ законъ Ньютона и на случай явленій магнитизма и электричества при чемъ ввелъ въ формулу коеффиціентъ k.

Наблюденія показываютъ, что силы взаимодѣйствія между матерьяльными точками кромѣ величинъ послѣднихъ и разстоянія между ними зависятъ еще и отъ рода промежуточной среды, въ которой находятся точки. Подобный фактъ вполнѣ согласуется съ современными взглядами на сущность дѣйствія силъ, по которымъ дѣйствіе на разстояніе можетъ передаваться только при помощи какой либо среды, являющейся связующимъ звеномъ между матерьяльными точками. Можно идти далѣе и такое дѣйствіе приписывать только присутствію той или другой среды и искать силы взаимодѣйствія не въ самыхъ тѣлахъ, а въ срединахъ. Однако ввиду того, что выводы наши относительно взаимодѣйствія между тѣлами ни въ чемъ не пострадаютъ, если мы будемъ предполагать силы, приложенными къ самымъ тѣламъ, то мы и можемъ сохранить его въ своей силѣ.

Вліяніе промежуточной среды пріобрѣтаетъ особенно важное значеніе въ явленіяхъ электрическихъ и магнитныхъ.

Ранѣе опредѣленія работы силъ, величины которыхъ измѣняются обратно пропорціонально квадратамъ разстояній точки отъ центра силъ, приведемъ нѣсколько общихъ опредѣленій, относящихся къ такъ называемому полю дѣйствія силъ и линіямъ силъ, что облегчитъ намъ впослѣдствіи формулированіе дѣлаемыхъ выводовъ *).

§ 245. Поле силъ. Напряженіе поля.

Если мы имѣемъ точку съ массой m, находящуюся гдѣ либо въ пространствѣ, то всякая другая матерьяльная точка m_1 будетъ подвергаться дѣйствію со стороны первой, выражающемуся нѣкоторой силой равной согласно внесенному предположенію

$$F = \frac{mm_1}{r^2},$$

гдѣ r — разстояніе между точками.

Такое дѣйствіе простирается и на всякую другую массу, помѣщенную въ пространствѣ, окружающемъ точку m, вслѣдствіе чего ему присваиваютъ названіе **поля дѣйствія силъ** или, короче, **поля силъ** даннаго центра m.

Такимъ образомъ всякая точка, помѣщенная въ томъ или другомъ мѣстѣ поля будетъ подвержена извѣстной силѣ, направленной къ центру поля. Спрашивается, какъ опредѣлить величину такой силы для каждой точки поля?

Для этого вводятъ опредѣленіе о напряженіи поля. **Напряженіемъ поля въ данной точкѣ его** называютъ величину силы, съ которой центръ поля съ опредѣленной массой дѣйствуетъ на матерьяльную точку съ массой равной единицѣ, находящуюся въ точкѣ, для которой опредѣляется напряженіе поля.

Величина напряженія поля на основаніи такого опредѣленія выражается слѣдующимъ образомъ:

$$H = \frac{m}{r^2} \tag{183}$$

Зная напряженіе поля, мы найдемъ всегда величину силы F, дѣйствующей на данную точку m_1, изъ формулы:

$$F = m_1 H = \frac{mm_1}{r^2}$$

Если мы имѣемъ одну точку m, производящую поле, то поверхности уровня въ немъ будемъ шаровыми поверхностями, при чемъ напряженія во всѣхъ точкахъ одной поверхности будутъ между собою

*) Объ опредѣленіяхъ этихъ мы не говорили выше при изложеніи общаго случая работы центральныхъ силъ потому, что они пріобрѣтаютъ спеціальное значеніе въ приложеніяхъ при изученіи дѣйствія центральныхъ Ньютоновыхъ силъ (въ электричествѣ и магнитизмѣ).

равны, направлены по радiусамъ къ центру или отъ центра поля, послѣднее будетъ въ зависимости отъ того, чѣмъ будутъ силы взаимодѣйствiя между данными точками: силами притяженiя или силами отталкиванiя.

Изъ выраженiя (183) видно, что на безконечнобольшомъ разстоянiи напряженiе поля равно нулю; на разстоянiи же равномъ нулю, напряженiе получаетъ безконечнобольшое значенiе. При изученiи дѣйствiя центральныхъ силъ съ послѣднимъ обстоятельствомъ не приходится однако имѣть дѣла на практикѣ, такъ какъ всякая дѣйствующая масса имѣетъ нѣкоторые конечные размѣры и, слѣдовательно, другая какая либо масса будетъ всегда находиться на конечномъ удаленiи отъ центра поля.

При данномъ центрѣ m, обусловливающемъ поле силъ, напряженiе поля въ общемъ случаѣ будетъ только функцiей разстоянiя точки поля отъ центра, т. е.

$$H = \varphi(r).$$

Если мы проведемъ черезъ центръ поля три взаимноперпендикулярныя оси Ox, Oy, Oz, то разстоянiе r точки отъ центра можетъ быть выражено посредствомъ проекцiй его по осямъ

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Такъ какъ проекцiи эти въ то же время представляютъ собою координаты взятой точки относительно центра поля (начала координатъ), то напряженiе поля будетъ функцiей координатъ данной точки. т. е.

$$H = \varphi(x, y, z)$$

или, какъ говорятъ короче, функцiей точки.

§ 246. Если мы изъ центра поля проведемъ прямую линiю неопредѣленной длины, то всякая матерьяльная точка, помѣщенная гдѣ либо на этой линiи, не имѣющая начальной скорости и предоставленная только дѣйствiю центральныхъ силъ будетъ двигаться подъ дѣйствiемъ силъ по направленiю этой линiи. Такую линiю называютъ силовой линiей, такъ какъ она выражаетъ направленiе силъ, дѣйствующихъ въ каждой точкѣ поля на помѣщенную въ ней матерьяльную точку. Въ разсматриваемомъ случаѣ линiи эти, которыхъ изъ центра поля можно провести неограниченное число, представляются расходящимися прямыми. Въ другихъ случаяхъ, о которыхъ мы скажемъ ниже, когда мы имѣемъ поле, созданное двумя или большимъ числомъ массъ, линiи силъ получаютъ болѣе сложный видъ.

Какъ сказано, число линiй силъ, выходящихъ изъ центра поля, можетъ быть произвольно велико. Точно такъ же черезъ любую часть поверхности уровня или элементъ ея можетъ быть проведено какое угодно число линій силъ. Число это однако ограничиваютъ приводя его къ нѣкоторому опредѣленному количеству, и пользуются имъ для выраженія напряженія поля въ данной точкѣ его, а именно: число линій силъ, приходящихся на одинъ квадратный сантиметръ поверхности уровня, окружающей данную точку, берутъ равнымъ напряженію поля въ этой точкѣ, измѣренному въ динахъ. Такимъ образомъ, если напряженіе поля въ какой либо точкѣ равно пяти динамъ, то черезъ квадратный сантиметръ поверхности уровня, проходящей черезъ эту точку, предполагаютъ проходящими пять силовыхъ линій.

На основаніи только что сказаннаго силовыя линіи являются непрерывно пронизывающими все данное поле около даннаго центра. Въ самомъ дѣлѣ, согласно основному положенію напряженіе поля уменьшается прямо пропорціонально квадратамъ разстояній, и въ такой же мѣрѣ увеличиваются величины поверхностей уровня. Такимъ образомъ, если мы представимъ себѣ какой либо тѣлесный уголъ имѣющій вершину въ центрѣ поля, а ребра его направленными по радіусамъ и если внутри угла изъ центра будутъ выходить Φ линій силъ, то части поверхностей уровня, заключающихся внутри такого угла, будутъ увеличиваться прямо пропорціонально квадратамъ разстояній отъ центра, а слѣдовательно, число линій силъ, приходящихся на одну квадратную единицу каждой изъ нихъ, будетъ уменьшаться въ томъ же отношеніи, т. е. въ той же степени въ какой уменьшается (ослабѣваетъ) напряженіе даннаго поля. Полное же число линій силъ, пронизывающихъ часть произвольной поверхности уровня, заключающуюся внутри взятаго тѣлеснаго угла съ вершиной въ центрѣ, будетъ одно и то же. Число этихъ силъ называютъ **пучкомъ силовыхъ линій**. Если обозначимъ: пучокъ линій Φ, величину вырѣзываемой угломъ поверхности уровня съ радіусомъ, равнымъ единицѣ S, то напряженіе поля H въ какой либо точкѣ его найдется изъ выраженія:

$$H = \frac{\Phi}{S} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

§ 247. Работа центральныхъ Ньютоновыхъ силъ

Найдемъ величину работы центральныхъ силъ при перемѣщеніи матерьяльной точки съ массой равной единицѣ съ разстоянія r_0 на разстояніе r отъ центра по произвольной траекторіи. Беря точку съ массой, равной единицѣ, мы вмѣсто силы F можемъ ввести величину напряженія поля, такъ какъ

$$F = 1 \cdot \frac{m}{r^2} = H \tag{184}$$

Видъ траекторіи, какъ было показано не оказываетъ вліянія на искомую величину работы.

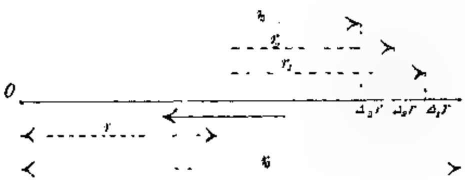
Работа опредѣляется общимъ выраженіемъ

$$T = \text{пр} \sum_{r_0}^{r} F \Delta r$$

которое въ разсматриваемомъ случаѣ получаетъ видъ

$$T = \text{пр.} \sum_{r_0}^{r} H \Delta r = \text{пр} \sum_{r_0}^{r} \frac{m}{r^2} \Delta r$$

при чемъ количество, стоящее подъ знакомъ суммы, представляетъ элементарную работу центральныхъ силъ. Займемся вычисленіемъ работы. Для этого разобьемъ перемѣщеніе или проекцію его $(r_0 - r)$ (фиг. 182) на рядъ элементовъ $\Delta_1 r$, $\Delta_2 r$, $\Delta_3 r$ ..., на столько малыхъ,



182

чтобы измѣненіемъ въ величинѣ силы при прохожденіи матерьяльной точкой каждаго изъ нихъ можно было пренебречь. Разстоянія этихъ элементовъ до центра обозначимъ соотвѣтственно черезъ r_1, r_2, r ..: тогда получимъ

$$\Delta_1 r = r_0 - r_1$$
$$\Delta_2 r = r_1 - r_2$$
$$\Delta_3 r = r_2 - r_3$$
$$\cdots\cdots$$
$$\Delta_{n-1} r = r_{n-2} - r_{n-1}$$
$$\Delta_n r = r_{n-1} - r_n.$$

Сила, дѣйствующая на движущуюся точку на протяженіи каждаго изъ элементовъ, будетъ имѣть нѣкоторую среднюю величину между значеніями, отвѣчающими началу и концу каждаго элементарнаго перемѣщенія. Возьмемъ за величину силы среднее геометрическое между этими крайними значеніями. Тогда напр. для перваго промежутка найдемъ:

$$H = \frac{m}{r_0 r_1}$$

Элементарныя работы при этомъ допущенiи будутъ таковы

$$\Delta_1 T = H_1' \Delta_1 r = \frac{m}{r_0 r_1}(r_0 - r_1) = m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right)$$

$$\Delta_2 T = H_2' \Delta_2 r = \frac{m}{r_1 r_2}(r_1 - r_2) = m\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right),$$

$$\Delta_3 T = H_3' \Delta_3 r = \frac{m}{r_2 r_3}(r_2 - r_3) = m\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\Delta_{n-1} T = H_{n-1}' \Delta_{n-1} r = \frac{m}{r_{n-2} r_{n-1}}(r_{n-2} - r_{n-1}) = m\left(\frac{1}{r_{n-1}} - \frac{1}{r_{n-2}}\right)$$

$$\Delta_n T = H_n' \Delta_n r = \frac{m}{r_{n-1} r}(r_{n-1} - r) = m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{n-1}}\right)$$

Складывая первыя и последнiя части этихъ равенствъ соответственно между собою и делая приведенiе получимъ.

$$T = \sum \Delta T = m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \tag{185}$$

Въ настоящемъ выводѣ мы считали центральныя силы (силы взаимодѣйствiя между движущейся точкой и центромъ поля) силами притягательными.

Если бы наоборотъ силы взаимодѣйствiя между точками были силами отталкивательными, что будетъ въ случаѣ напр. двухъ одноименныхъ магнитныхъ полюсовъ или одноименныхъ количествъ электричества, то выраженiе (185) при перемѣщенiи точки согласно фиг. 182 получило бы слѣдующiй видъ:

$$T = m\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)$$

Опредѣленiе работы въ только что разсмотрѣнномъ случаѣ было произведено аналитическимъ путемъ, благодаря тому, что мы имѣли уравненiе, опредѣляющее зависимость H отъ r (183). Если бы послѣдняя была дана кривой въ осяхъ H и r, то та же работа могла бы быть найдена графическимъ путемъ, при чемъ выразилась бы участкомъ площади кривой въ границахъ соотвѣтствующихъ началу и концу даннаго перемѣщенiя.

Обратно, если бы намъ была дана работа уравненiемъ (185), то мы нашли бы напряженiе какъ функцiю времени при помощи выраженiя

$$H = \text{пр.} \frac{\Delta T}{\Delta r}.$$

Знакъ минусъ здѣсь введенъ потому, что работа, совершаемая силами при удаленіи матерьяльной точки отъ центра, т. е. при увеличеніи разстоянія между ними, получаетъ отрицательную величину, такъ какъ матерьяльная точка движется при этомъ обратно направленію силъ.

Дѣйствительно вычисляя величину

$$\text{пр.}\,\frac{\Delta T}{\Delta r}$$

при помощи уравненія (186), найдемъ послѣдовательно

$$T_{r+\Delta r} = m\left(\frac{1}{r+\Delta r} - \frac{1}{r_0}\right),$$

$$T_r = m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

$$\Delta T = m\left(\frac{1}{r+\Delta r} - \frac{1}{r}\right) = -m\,\frac{\Delta r}{r\,(r+\Delta r)},$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta r} = -\frac{m}{r\,(r+\Delta r)}.$$

$$\text{пр}\,\frac{\Delta T}{\Delta r} = -\frac{m}{r^2} = -H$$

или

$$H = -\,\text{пр}\,\frac{\Delta T}{\Delta r} \tag{185a}$$

§ 248. Работа въ частныхъ случаяхъ перемѣщеній.

1. $r = r_0$. Движущаяся точка возвращается на поверхность уровня съ которой начала свое движеніе. $T = 0$.

2. Если $r < r_0$, т. е. если масса приблизилась къ центру, то работа при силахъ притягивательныхъ положительна; если $r > r_0$ — работа отрицательна. Въ первомъ случаѣ живая сила массы возрастаетъ во второмъ уменьшается.

3. $r = 0$; тогда $T = \infty$, т. е. при перемѣщеніи точки въ центръ поля работа достигаетъ безконечнобольшой величины. Но какъ было замѣчено выше (§ 246), подобный случай является практически невозможнымъ.

4. $r = \infty$, $T = -\frac{m}{r_0}$, т. е. въ случаѣ удаленія точки съ разстоянія r_0 на безконечнобольшое разстояніе, работа будетъ зависѣть только отъ начальнаго разстоянія точки. Работа при переходѣ точки изъ безконечности на данную поверхность уровня (r_0) въ случаѣ отталкивательныхъ силъ выразилась бы величиной:

$$T = \frac{m}{r_0}$$

Величина эта будетъ одна и та же для данной поверхности уровня подобно напряженію поля, и будетъ, слѣдовательно, опредѣлять вполнѣ данную поверхность. Поэтому величиной этой работы можно пользоваться для характеристики поля въ данной точкѣ или для характеристики поверхности уровня, тѣмъ болѣе, что имѣя ее, мы можемъ найти и напряженіе поля и величину составляющей этого напряженія при перемѣщеніи матерьяльной точки по любому направленію. При этомъ является еще то удобство, что работа, какъ и живая сила, не имѣетъ направленія, подобно напряженію, которое приходится изображать векторомъ, въ случаѣ же работы достаточно лишь знать величину ея и знакъ.

§ 249. Потенціалъ и потенціальная функція

Указанную выше работу:

$$T = \frac{m}{r},$$

которую произведутъ силы, приложенныя къ разсматриваемой матерьяльной точкѣ съ массой равной единицѣ, при переходѣ ея изъ данной точки пространства въ безконечность, называютъ потенціаломъ поля въ данной точкѣ его. Терминомъ «потенціалъ» мы обозначили работу, необходимую для удаленія матерьяльной точки съ массой въ одну единицу изъ данной точки поля въ безконечность. Но болѣе обще можно разумѣть подъ именемъ «потенціала» работу, которую необходимо затратить для перемѣщенія точки изъ даннаго положенія на опредѣленную, выбранную заранѣе поверхность уровня, остающуюся при томъ постоянной для одного и того же изслѣдованія. Въ такомъ случаѣ «потенціалъ» въ данной точкѣ найдется путемъ такихъ соображеній: работа, необходимая для перемѣщенія единицы массы изъ данной точки поля въ безконечность, можетъ быть представлена въ видѣ суммы работъ на протяженіи двухъ перемѣщеній: 1) отъ данной точки до выбранной произвольно, но остающейся затѣмъ постоянной для даннаго вопроса поверхности уровня V и 2) отъ этой поверхности уровня въ безконечность.

Послѣдняя работа будетъ, очевидно, величиной постоянной (поверхность уровня постоянна), а потому, обозначая ее черезъ $-C$, получимъ:

$$V + (-C) = -\frac{m}{r}$$

откуда

$$V = -\frac{m}{r} + C \tag{186}$$

Работа, необходимая для перемѣщенія точки съ данной поверхности уровня въ безконечность, обозначена черезъ C со знакомъ минусъ потому, что при при силахъ притяженія между точками работа эта будетъ отрицательна.

При разсмотрѣнныхъ условіяхъ величина потенціала будетъ зависѣть отъ выбора постоянной произвольной C.

Величину эту называютъ «постоянной, произвольной» на основаніи тѣхъ же соображеній, которыя были изложены выше въ § 86 относительно начальнаго разстоянія s_0.

То или другое значеніе величины C не играетъ роли въ томъ случаѣ, если насъ интересуетъ не абсолютная величина потенціала, а разность потенціаловъ въ двухъ точкахъ поля, иначе говоря, работа, которую необходимо совершить для перемѣщенія матерьяльной точки изъ нѣкотораго положенія A и B. Дѣйствительно для каждаго изъ нихъ имѣемъ:

$$V_A = -\frac{m}{r_1} + C$$

$$V_B = -\frac{m}{r_2} + C$$

гдѣ r_1 и r_2—разстоянія A и B отъ центра.

Вычитая изъ перваго равенства второе, находимъ

$$V_A - V_B = -\left(\frac{m}{r_1} - \frac{m}{r_2}\right). \tag{187}$$

C при этомъ исчезаетъ.

Если, мы будемъ разсматривать матерьяльную точку съ массой равной m', то работа, которая должна быть затрачена для передвиженія ея изъ данной точки поля въ безконечность выразится такъ

$$U = Vm' = -\frac{mm'}{r}$$

Величинѣ этой присваиваютъ названіе потенціальной функціи.

Подобно потенціалу потенціальная функція, очевидно, зависитъ только отъ координатъ движущейся точки.

Изъ изложеннаго мы видимъ, что если величины силъ, приложенныхъ къ матерьяльной точкѣ, зависятъ лишь отъ разстоянія ея отъ центра поля, то работа силъ, выражаемая въ случаѣ точки съ массой равной единицѣ, разностью потенціаловъ, зависитъ лишь отъ начальнаго и конечнаго положенія движущейся массы.

Такія силы называются обладающими потенціаломъ или потенціальными.

Общее выраженіе потенціала при этомъ таково

$$V = f(x, y, z) \tag{188}$$

§ 250. Поверхности равнаго потенціала.

Послѣднее уравненіе, какъ извѣстно изъ аналитической геометріи, представляетъ собою уравненіе поверхности, отнесенной къ тремъ осямъ координатъ

Дѣйствительно, двумъ координатамъ мы можемъ дать произвольныя значенія, третья найдется изъ уравненія (188), не трудно видѣть, что мы получимъ при этомъ поверхность.

Различныя точки даннаго поля силъ, удовлетворяющія этому уравненію и, слѣдовательно, лежащія на данной поверхности, будучи разсматриваемы съ механической точки зрѣнія, обладаютъ однимъ и тѣмъ же потенціаломъ. Вслѣдствіе этого и самую поверхность называютъ **поверхностью равнаго потенціала**.

Подобныхъ поверхностей во всякомъ силовомъ полѣ можно представить, очевидно, безчисленное множество.

Если матерьяльная точка будетъ перемѣщаться по одной и той же поверхности равнаго потенціала, то работа силъ, къ ней приложенныхъ, опредѣляемая разностью потенціаловъ, будутъ нулемъ. Но такъ какъ при этомъ ни сила, къ точкѣ приложенная, ни перемѣщеніе, ею совершенное не равны нулю, то изъ выраженія элементарной работы:

$$\Delta T = F\Delta s \cos(F, \Delta s) = 0$$

находимъ

$$\cos(F, \Delta s) = 0$$

т. е.

$$\angle (F, \Delta s) = 90^\circ.$$

Слѣдовательно, сила при этомъ перпендикулярна къ направленію перемѣщенія точки или, болѣе обще, сила перпендикулярна къ поверхности равнаго потенціала. Но подобныя свойства, какъ мы выше видѣли, принадлежатъ поверхностямъ уровня (§ 241), которыя, слѣдовательно суть въ то же самое время и поверхности равнаго потенціала.

На основаніи закона живыхъ силъ имѣемъ

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = (U - U_0)$$

гдѣ U и U_0 суть потенціальныя функціи, отвѣчающія нѣкоторымъ поверхностямъ равнаго потенціала. При прохожденіи точкою данной поверхности U будетъ величиной постоянной, а слѣдовательно, будетъ постоянна и скорость точки v. Такимъ образомъ точка, находящаяся подъ дѣйствіемъ потенціальныхъ силъ при прохожденіи черезъ одну и ту же поверхность равнаго потенціала или, что то же поверхность уровня будетъ имѣть одну и ту же скорость *)

§ 251. Соотношеніе между потенціаломъ и напряженіемъ.

Такъ какъ потенціалъ представляетъ работу, необходимую для перемѣщенія массы, равной единицѣ изъ данной точки поля въ дан

---

*) Слѣдуетъ замѣтить, что рѣчь здѣсь идетъ лишь объ абсолютной величинѣ, но не о направленіи скорости, которое можетъ быть вообще говоря различнымъ.

ную (постоянную) поверхность уровня, то соотношеніе между нимъ и напряженіемъ поля въ данной точкѣ будетъ одинаково съ указаннымъ въ § 247, а именно:

$$V = \text{пр} \sum_{r_0} H \Delta r \tag{189}$$

и обратно

$$H = -\text{пр.} \frac{\Delta V}{\Delta r}. \tag{190}$$

Знакъ минусъ въ первой формулѣ поставленъ потому, что силы направлены къ центру поля, а подъ потенціаломъ разумѣется работа при перемѣщеніи точки отъ центра, при чемъ направленія силъ и перемѣщенія будутъ обратны другъ другу, т. е. $\cos$ угла между ними будетъ равенъ -1.

§ 252. Поле силъ и потенціалъ въ случаѣ двухъ или нѣсколькихъ центровъ.

Въ случаѣ двухъ или нѣсколькихъ центровъ напряженіе поля въ данной точкѣ его будетъ геометрической суммой напряженій, вызываемыхъ каждымъ центромъ, такъ напр. при двухъ центрахъ имѣемъ:

$$H_1 = \frac{m}{r_1^2}, \quad H_2 = \frac{m_2}{r_2^2},$$

и

$$H = H_1 + H_2.$$

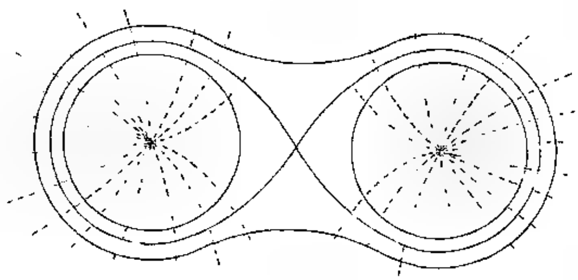
Когда мы разсматривали поле, образуемое однимъ центромъ, то было ясно, что силовыя линіи, будучи радіальными прямыми, могли пересѣкаться только въ центрѣ; въ остальныхъ точкахъ поля пересѣченіе ихъ невозможно. То же самое свойство силовыя линіи сохраняютъ и въ случаѣ нѣсколькихъ центровъ.

Дѣйствительно, если бы мы допустили, что линіи эти могутъ гдѣ либо встрѣтиться, мы тѣмъ самымъ допустили бы возможность проведенія въ точкѣ встрѣчи двухъ касательныхъ къ этимъ линіямъ, а такъ какъ касательная къ силовой линіи въ данной точкѣ выражаетъ направленіе напряженія, то не говоря даже о величинѣ послѣдняго, мы должны были бы закончить, что въ данной точкѣ поля, могутъ существовать два направленія напряженій, что, очевидно, невозможно, а потому силовыя линіи не могутъ пересѣкаться.

Фиг. 183 представляетъ поле въ случаѣ двухъ центровъ съ одинаковыми массами. Сплошными линіями проведены пересѣченія поверхностей равнаго потенціала съ плоскостью чертежа; пунктиромъ представлены силовыя линіи въ плоскости чертежа. Тѣ и другія взаимноперпендикулярны въ точкахъ встрѣчи.

Вмѣсто того, чтобы въ случаѣ нѣсколькихъ центровъ опредѣлять поле посредствомъ напряженія находимаго геометрическимъ сложеніемъ напряженій, вызываемыхъ отдѣльными центрами, представляется болѣе удобнымъ опредѣлить поле подобно тому, какъ это было указано выше (§ 248), посредствомъ работы, которую нужно затратить для перемѣщенія разсматриваемой матерьяльной точки съ массой равной единицѣ изъ даннаго положенія на безконечно большое разстояніе. Найдемъ выраженіе этой работы (потенціалъ).

Работа при перемѣщеніи точки съ массой равной единицѣ въ



183

полѣ, производимомъ нѣсколькими центрами m', m'', m''' ... будетъ равна суммѣ работъ всѣхъ силъ вызываемыхъ центрами т. е.

$$I = m'\left(\frac{1}{r_0'} - \frac{1}{r'}\right) + m''\left(\frac{1}{r_0''} - \frac{1}{r''}\right) + m'''\left(\frac{1}{r_0'''} - \frac{1}{r'''}\right) + \ldots$$

При удаленіи точки изъ даннаго положенія на безконечнобольшое разстояніе отъ центровъ работа центральныхъ силъ или потенціалъ выразится такъ:

$$I = \frac{m'}{r_0'} + \frac{m''}{r_0''} + \frac{m'''}{r_0'''} + \ldots$$

Подобно тому что мы имѣли въ случаѣ одного центра, и здѣсь потенціалъ будетъ функціей только разстояній точки отъ центровъ. Соединивъ между собою всѣ тѣ точки, для которыхъ потенціалъ будетъ имѣть одно и то же значеніе, мы и получимъ рядъ поверхностей равнаго потенціала. Слѣдовательно потенціалъ будетъ вполнѣ опредѣлять данную точку пространства подобно напряженію.

§ 253. *Соотношеніе между потенціаломъ и напряженіемъ въ произвольномъ полѣ.*

Отнесемъ всѣ величины къ тремъ прямоугольнымъ осямъ координатъ. Потенціалъ будетъ функціей координатъ матерьяльной точки а именно въ общемъ видѣ имѣемъ:

$$V = f\,(x, y, z).$$

Если точка перемѣстилась на нѣкоторое разстояние Δ, составляющія котораго суть Δx, Δy и Δz, то

$$\Delta V = -[X\,\Delta x + Y\,\Delta y + Z\,\Delta z]$$

при чемъ (см. §§ 69 и 162)

$$X = -\text{пр.}\,\frac{\Delta V}{\Delta x};\quad Y = -\text{пр.}\,\frac{\Delta V}{\Delta y},\quad Z = -\text{пр.}\,\frac{\Delta V}{\Delta z} \tag{191}$$

Послѣднія величины представляютъ собою составляющія напряженія по направленіямъ осей или, что то же, проекціи напряженія на оси; слѣдовательно напряженіе будетъ равно:

$$H = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{\left(\text{пр.}\,\frac{\Delta V}{\Delta x}\right)^2 + \left(\text{пр.}\,\frac{\Delta V}{\Delta y}\right)^2 + \left(\text{пр.}\,\frac{\Delta V}{\Delta z}\right)^2} \tag{192}$$

Направленіе же напряженія можетъ быть опредѣлено при посредствѣ косинусовъ угловъ, образуемыхъ имъ съ осями; такъ напр.

$$\cos\,(H, Ox) = \frac{X}{H} = -\frac{\text{пр.}\,\dfrac{\Delta V}{\Delta x}}{\sqrt{\left(\text{пр.}\,\dfrac{\Delta V}{\Delta x}\right)^2 + \left(\text{пр.}\,\dfrac{\Delta V}{\Delta y}\right)^2 + \left(\text{пр.}\,\dfrac{\Delta V}{\Delta z}\right)^2}} \tag{193}$$

и т. д.

Только что изложенныя разсужденія относились къ матерьяльной точкѣ съ массою, равною единицѣ. Если бы мы разсматривали точку, масса которой была бы равна m', то вмѣсто потенціала въ найденныя выраженія слѣдовало бы ввести потенціальную функцію, при чемъ $U = Vm'$ (§ 279); а вмѣсто напряженія—силу, дѣйствующую на матерьяльную точку, т. е. $F = Hm'$.

Изъ изложеннаго видно, что если мы будемъ знать распредѣленіе потенціала въ данномъ полѣ, то безъ затрудненія найдется величина и направленіе напряженія въ любой точкѣ. Замѣтимъ при этомъ, что характеристика поля посредствомъ потенціала является болѣе удобной по сравненію съ напряженіемъ потому, что при этомъ не приходится имѣть дѣло съ геометрическими величинами, каковы напряженія, такъ какъ потенціалъ и потенціальная функція не имѣютъ направленія (§ 248).

Примѣняя обозначенія высшей математики получимъ:

$$U = \varphi\,(x, y, z)$$

$$dU = d\varphi\,(x, y, z) = -(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy + \frac{\partial U}{\partial z}\,dz$$

гдѣ круглое ∂ введено для обозначенія частныхъ производныхъ данной функціи.

Отсюда
$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

т. е. производныя потенціальной функціи по координатамъ равны проекціямъ силъ на координатныя оси.

§ 254. Однородное поле силъ. Выраженіе работы силъ.

Однороднымъ или равномѣрнымъ полемъ силъ называютъ такое, въ которомъ силовыя линіи суть прямыя паралельныя между собою, а напряженіе поля во всѣхъ точкахъ его имѣетъ одну и ту же величину. Поверхности уровня обращаются въ этомъ случаѣ въ плоскости, перпендикулярныя къ силовымъ линіямъ. Таково напр. поле силъ тяжести, принимаемое въ практикѣ за однородное.

Найдемъ работу центральныхъ силъ въ этомъ случаѣ.

$$T = \text{пр} \sum_{r_0}^{r} F\Delta r = F \text{ пр} \sum \Delta r = F(r - r_0) \qquad (194)$$

Послѣднее выраженіе одинаково съ тѣмъ, которое получается при примѣненіи закона живыхъ силъ къ случаю движенія тѣлъ въ полѣ силы тяжести.

§ 255. Законъ сохраненія энергіи въ примѣненіи къ потенціальнымъ силамъ.

Выше (§ 250) имѣли:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -(U - U_0)$$

Отсюда

$$\frac{mv^2}{2} + U = \frac{mv_0^2}{2} + U_0$$

Равенство это и выражаетъ законъ сохраненія энергіи въ примѣненіи къ центральнымъ силамъ.

*

ГЛАВА XXVIII

Ударъ тѣлъ

§ 256. Происхожденіе удара тѣлъ

Если два тѣла приходятъ въ соприкосновеніе, имѣя различныя скорости, то происходитъ явленіе, называемое ударомъ. Такъ какъ тѣла не могутъ проникнуть одно въ другое, то должно наступить измѣненіе относительныхъ скоростей ихъ, а если измѣняется скорость, то всякую причину, произведшую такое измѣненіе, можно разсматривать какъ силу. Въ данномъ случаѣ является сила, называемая силою удара

Сила удара если и не достигаетъ очень большой величины, производящей разрушеніе ударяющихся тѣлъ, то вызываетъ во всякомъ случаѣ извѣстное измѣненіе формы тѣлъ въ точкахъ соприкосновенія ихъ между собою; поэтому тѣла при ударѣ не представляется возможнымъ разсматривать какъ тѣла абсолютно твердыя тѣмъ болѣе, что подобное допущеніе привело бы къ тому, что усилія, развивающіяся при ударѣ вслѣдствіе внезапнаго измѣненія скоростей ударяющихся тѣлъ (а не постепеннаго при измѣненіи формы ихъ) получили бы чрезмѣрно большія величины которыя необходимо вызвали бы разрушеніе тѣлъ.

Явленія, происходящія при ударѣ тѣлъ, могутъ быть весьма разнообразны *) «1) измѣненія скоростей тѣлъ, 2) измѣненія формы тѣлъ; 3) колебательныя движенія частицъ тѣлъ, 4) разстройство связи между частицами тѣлъ. 5) разрушеніе тѣлъ· 6) звукъ· 7) выдѣленіе теплоты, свѣта, электричества.

Общее разсмотрѣніе вопроса объ ударѣ требуетъ изслѣдованія всѣхъ этихъ явленій и вообще опредѣленія движенія каждой изъ частицъ тѣлъ послѣ ихъ встрѣчи при условіи, что движеніе ударяющихся массъ до момента удара извѣстно

Отсюда видно, что строгое разсмотрѣніе вопроса объ ударѣ тѣлъ представляетъ большія затрудненія. Мы поэтому удовлетворяемся приближеніемъ. Именно мы замѣнимъ дѣйствительныя тѣла идеаль

*) Л. Кирпичевъ Начала механики, 1889 § 268

ными, состоящими изъ массъ неизмѣняемой формы, снабженныхъ въ точкахъ удара пружинами, пружины эти будемъ считать неимѣющими массы. Черезъ это представится возможность отдѣлить въ разсматриваемыхъ тѣлахъ массу вещества и упругость вещества. Для разсмотрѣнія удара неупругихъ тѣлъ будемъ предполагать, что пружины, измѣнивши при ударѣ свою форму, вовсе ее затѣмъ не возстановляютъ. Для разсмотрѣнія же удара упругихъ тѣлъ предположимъ, что пружины, измѣнивши сначала свою форму, затѣмъ вполнѣ ее возстановляютъ, такъ что въ концѣ удара форма ударившихся тѣлъ будетъ такою же, какъ и въ началѣ.

Выгода разсмотрѣнія тѣлъ такого строенія заключается въ томъ что мы при этомъ можемъ не разсматривать никакихъ явленій, происходящихъ между частицами, и можемъ ограничиться только разсмотрѣніемъ движенія цѣлыхъ массъ».

§ 257. Виды удара тѣлъ.

Въ зависимости отъ относительнаго направленія скоростей ударяющихся тѣлъ различаютъ слѣдующіе виды удара:

1. Прямой, когда оба тѣла въ точкѣ касанія имѣютъ общую нормаль, совпадающую съ направленіемъ скорости каждаго изъ тѣлъ.

2. Косвенный ударъ, когда скорости тѣлъ образуютъ между собою уголъ.

Въ зависимости отъ того, проходитъ ли общая нормаль въ точкѣ удара тѣлъ (нормаль удара) черезъ ихъ центры тяжести или нѣтъ различаютъ ударъ центральный и внѣцентренный. При разсмотреніи центральнаго удара тѣлъ (прямой или косвенный) наиболѣе простымъ, хотя и не безусловно необходимымъ, является представленіе ударяющихся тѣлъ въ видѣ двухъ шаровъ.

При ударѣ тѣлъ изъ внѣшнихъ силъ на нихъ дѣйствуетъ только сила тяжести, но ввиду того, что продолжительность удара обыкновенно очень мала, усилія же, при этомъ развивающіяся, по сравненію съ вѣсомъ тѣлъ получаются весьма значительными, вліяніемъ силы тяжести можно пренебречь; слѣдовательно, всю совокупность ударяющихся тѣлъ можно разсматривать какъ систему подверженную только дѣйствію внутреннихъ силъ.

Обратимся первоначально къ изученію удара неупругихъ тѣлъ и при томъ удара прямого и центральнаго.

§ 258. Прямой центральный ударъ двухъ неупругихъ тѣлъ.

Такъ какъ система двухъ ударившихся тѣлъ подвержена только дѣйствію внутреннихъ силъ, то для нея имѣетъ мѣсто законъ сохраненія количествъ движенія (§ 210). Обозначая массы тѣлъ черезъ m_1 и m_2, скорости ихъ вначалѣ удара—v_{1_0}, v_{2_0}, скорости въ нѣкото рое послѣдующее мгновеніе v_1 и v_2, находимъ

$$m_1 v_{1_0} + m_2 v_{2_0} = m_1 v_1 + m_2 v_2.$$

Слѣдствіемъ удара будетъ то, что скорость тѣла ударившаго (имѣвшаго большую скорость) будетъ уменьшаться, скорость же тѣла, подвергнувшагося удару, начнетъ возрастать, такое измѣненіе скоростей будетъ продолжаться до тѣхъ поръ, пока онѣ не достигнутъ нѣкотораго общаго значенія v: этотъ моментъ будетъ концомъ удара. Примѣняя послѣднее уравненіе для промежутка времени между началомъ и концомъ удара, получимъ:

$$m_1 v_{1_0} + m_2 v_{2_0} = (m_1 + m_2)\, v$$

откуда

$$v = \frac{m_1 v_{1_0} + m_2 v_{2_0}}{m_1 + m_2} \qquad (195)$$

Формула эта относится къ тому случаю, когда скорости направлены въ одну сторону, въ противномъ случаѣ получаемъ

$$v = \frac{m_1 v_{1_0} - m_2 v_{2_0}}{m_1 + m_2}$$

Укажемъ главнѣйшіе изъ частныхъ случаевъ.

1. $v_2 = 0$, тѣло m_2 покоится; имѣемъ.

$$v = \frac{m_1 v_{1_0}}{m_1 + m_2}.$$

2. $v_{1_0} = v_{2_0}$,

$$v = v_{1_0} = v_{2_0}.$$

Тѣла своихъ скоростей не измѣняютъ: ударъ отсутствуетъ.

3. $v_{1_0} = - v_{2_0}$; скорости направлены въ противоположныя стороны и равны между собою. Тогда

$$v = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, v_{1_0}$$

4. $m_1 = m_2$

$$v = \frac{v_{1_0} \pm v_{2_0}}{2}$$

Верхній знакъ относится къ случаю, когда скорости направлены въ одну сторону, нижній—въ противоположныя стороны.

5. $m_1 = m_2$ и $v_1 = - v_2$

$$v = 0.$$

6. Масса ударяемаго тѣла значительно больше массы ударяющаго тогда въ числителѣ и знаменателѣ пренебрегаемъ членами $m_1 v_{1_0}$ и m_1 по сравненію со вторыми членами того и другого и находимъ:

$$v = \frac{m_2 v_{2_0}}{m_2} = v_{2_0}$$

т. е. скорость ударяемаго тѣла не измѣняется. Въ частности, если

$$v_{2_0} = 0,$$

т. е. тѣло ударяется о неподвижную преграду, то оно теряетъ свою скорость.

Имѣя это въ виду, частямъ сооруженій, которыя должны безъ вреда для себя выдерживать сильные удары, придаютъ значительные вѣса.

7. Если скорость v_{2_0} значительно больше v_{1_0}, то подобно предыдущему

$$v = v_{2_0},$$

т. е. скорость ударяющаго тѣла не измѣняется.

§ 259. Теорема Карно

При ударѣ неупругихъ тѣлъ сумма живыхъ силъ ихъ уменьшается, происходитъ потеря живой силы, равная разности живыхъ силъ въ началѣ и концѣ удара, а именно.

$$\frac{m_1}{2}(v_{1_0}^2 - v^2) + \frac{m_2}{2}(v_{2_0}^2 - v^2) \text{ *)}$$

Первая разность квадратовъ

$$(v_{1_0}^2 - v^2)$$

можетъ быть преобразована слѣдующимъ образомъ.

Прибавляя къ ней величину

$$(-2v_{1_0}v + v^2 + 2v_{1_0}v - v^2)$$

равную нулю, найдемъ

$$v_{1_0}^2 - 2v_{1_0}v + v^2 + 2v_{1_0}v - 2v^2 =$$

$$= (v_{1_0} - v)^2 + 2v(v_{1_0} - v).$$

Точно такъ же для второй разности квадратовъ получимъ

$$(v_{2_0} - v)^2 + 2v(v_{2_0} - v)$$

Такимъ образомъ искомая потеря живой силы будетъ равна:

$$\left[\frac{m_1}{2}(v_{1_0} - v)^2 + \frac{m_2}{2}(v_{2_0} - v)^2\right] + v\left[m_1(v_{1_0} - v) + m_2(v_{2_0} - v)\right]$$

но на основаніи закона сохраненія количествъ движенія

$$m_1(v_{1_0} - v) + m_2(v_{2_0} - v) = 0$$

*) Помня законъ сохраненія энергіи, мы знаемъ, что живая сила не исчезаетъ окончательно, а преобразуется въ другіе виды энергіи.

а потому окончательно получаемъ

$$\frac{m_1}{2}(v_{1_0}-v)^2+\frac{m_2}{2}(v_{2_0}-v)^2 \qquad (196)$$

т. е. живая сила, потерянная при ударѣ неупругихъ тѣлъ равна суммѣ живыхъ силъ, соотвѣтствующихъ потеряннымъ тѣлами скоростямъ: $(v_{1_0}-v)$ и $(v_{2_0}-v)$. Теорема эта носитъ названіе теоремы Карно.

§ 260. Прямой центральный ударъ двухъ упругихъ тѣлъ.

При ударѣ упругихъ тѣлъ нужно различать два періода: первый подобный имѣющему мѣсто при ударѣ неупругихъ тѣлъ, и второй состоящій въ возстановленіи формы ударившихся тѣлъ послѣ момента наибольшаго сжатія ихъ. Въ концѣ второго періода разстоянія между частицами тѣлъ будутъ тѣ же самыя, что и до удара, а потому работа внутреннихъ силъ будетъ равна нулю (§ 224), а слѣдовательно живая сила въ началѣ удара будетъ равна живой силѣ въ концѣ его, т. е.

$$\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}=\frac{m_1v_{1_0}^2}{2}+\frac{m_2v_{2_0}^2}{2}\ {}^{*)} \qquad (197)$$

Найдемъ величины скоростей ударившихся тѣлъ v_1 и v_2 въ концѣ удара, для чего кромѣ уравненія живыхъ силъ можемъ воспользоваться закономъ сохраненія количествъ движенія:

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_{1_0}+m_2v_{2_0} \qquad (198)$$

Изъ этого уравненія имѣемъ:

$$m_1v_1^2-m_1v_{1_0}^2=m_2v_{2_0}^2-m_2v_2^2,$$

$$m_1(v_1+v_{1_0})(v_1-v_{1_0})=m_2(v_{2_0}+v_2)(v_{2_0}-v_2)$$

Но такъ какъ (уравненіе 198)

$$m_1(v_1-v_{1_0})=m_2(v_{2_0}-v_2)$$

то

$$v_1+v_{1_0}=v_{2_0}+v_2$$

откуда

$$v_1=v_{2_0}+v_2-v_{1_0}.$$

Подставляя эту величину въ уравненіе (198) найдемъ

$$m_1(v_{2_0}+v_2-v_{1_0})+m_2v_2=m_1v_{1_0}+m_2v_{2_0}$$

или

$$v_2(m_1+m_2)=m_2v_{2_0}-m_1v_{2_0}+2m_1v_{1_0}=$$

$$=(m_1+m_2)v_{2_0}+2m_1(v_{1_0}-v_{2_0}).$$

---

*) Такимъ образомъ при ударѣ упругихъ тѣлъ нѣтъ той потери живой силы, которая происходитъ при ударѣ тѣлъ неупругихъ и величина которой была опредѣлена выше (§ 259).

Откуда

$$v_2 = v_{2_0} - \frac{2m_1}{m_1 + m_2}(v_{2_0} - v_{1_0}) \tag{199}$$

Подобнымъ же образомъ получимъ

$$v_1 = v_{1_0} - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}(v_{1_0} - v_{2_0}) \tag{200}$$

Сравнимъ приращенія скоростей ударившихся тѣлъ въ случаѣ тѣлъ упругихъ и неупругихъ. Изъ послѣднихъ выраженій (199) и (200) находимъ

$$v_1 - v_{1_0} = -\frac{2m_2}{m_1 + m_2}(v_{1_0} - v_{2_0})$$

$$v_2 - v_{2_0} = -\frac{2m_1}{m_1 + m_2}(v_{2_0} - v_{1_0})$$

Для тѣлъ же неупругихъ имѣемъ

$$m_1(v_{1_0} - v) + m_2(v_{2_0} - v) = 0$$

$$v = \frac{m_1 v_{1_0} + m_2 v_{2_0}}{m_1 + m_2}$$

слѣдовательно

$$v - v_{1_0} = \frac{m_1 v_{1_0} + m_2 v_{2_0}}{m_1 + m_2} - v_{1_0} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_{1_0} - v_{2_0})$$

$$v - v_{2_0} = \frac{m_1 v_{1_0} + m_2 v_{2_0}}{m_1 + m_2} - v_{2_0} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_{2_0} - v_{1_0})$$

т. е. измѣненія скоростей въ случаѣ тѣлъ упругихъ будутъ вдвое болѣе нежели для тѣлъ неупругихъ.

Разсмотримъ нѣкоторые частные случаи удара упругихъ тѣлъ.

Если массы тѣлъ равны, т. е. $m_1 = m_2$, то изъ уравненій (199 и 200), получаемъ:

$$v_1 = v_{2_0}, \quad v_2 = v_{1_0},$$

т. е. тѣла мѣняются своими скоростями.

Если бы одно изъ тѣлъ находилось въ покоѣ, положимъ

$$v_{2_0} = 0$$

тогда имѣемъ

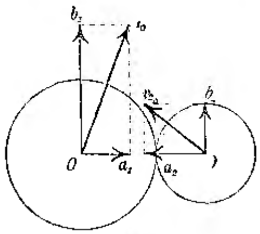
$$v_1 = 0$$

т. е. послѣ удара ударившее тѣло останется въ покоѣ, а ударяемое приметъ его скорость. Заключеніе это находитъ себѣ подтвержденіе при извѣстномъ опытѣ съ шарами изъ слоновой кости *).

*) Краевичъ. Учебникъ физики, стр. 573.

§ 261. Косвенный центральный ударъ тѣлъ.

Скорости тѣлъ въ концѣ косвеннаго удара ихъ находятся на основанiи изложеннаго выше о прямомъ ударѣ тѣлъ, для чего слѣдуетъ только разложить каждую изъ скоростей v_{1_0} и v_{2_0} въ мгновенiе удара на двѣ (фиг. 184): по линiи центровъ тяжести тѣлъ и по направленiямъ, перпендикулярнымъ къ этой линiи:



184

$$\overline{v_{1_0}} = \overline{a_1} + \overline{b_1} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2},$$
$$\overline{v_{2_0}} = \overline{a_2} + \overline{b_2} = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$$

Составляющiя a_1 и a_2 въ концѣ удара получаютъ нѣкоторыя значенiя v_1' и v_2', одинаковыя съ тѣми, которыя бы онѣ имѣли, при прямомъ ударѣ тѣлъ; составляющiя b_1 и b_2 сохранятъ прежнiя значенiя— b_1 и b_2; такимъ образомъ окончательныя скорости v_1 и v_2 будутъ равны:

$$\overline{v_1} = \overline{v_1}' + \overline{b_1} = \sqrt{v_1'^2 + b_1^2},$$
$$\overline{v_2} = \overline{v_2}' + \overline{b_2} = \sqrt{v_2'^2 + b_2^2}.$$

§ 262. Центральный ударъ упругаго тѣла о неподвижную плоскость

Плоскость, о которую ударяется разсматриваемое тѣло предположимъ совершенно неизмѣняемой.

Въ случаѣ прямого удара тѣла о плоскость тѣло въ концѣ удара получаетъ ту же скорость, что и въ началѣ его, но обратно направленную, т. е. отражается отъ плоскости со скоростью равной по величинѣ начальной скорости.

Если ударъ былъ косвеннымъ, то скорость v_0 въ моментъ удара можетъ быть разложена на двѣ: a и b, изъ которыхъ первая паралельна къ плоскости, а вторая перпендикулярна къ ней. Въ концѣ удара тѣло будетъ имѣть также двѣ скорости: $a' = -a$ и b, которыя при сложенiи дадутъ скорость v, равную v_0 и направленную къ перпендикуляру къ плоскости подъ угломъ отраженiя, равномъ углу паденiя.

Дѣйствительныя явленiя удара отступаютъ отъ только что разсмотрѣннаго по слѣдующимъ причинамъ: во первыхъ, въ точкахъ соприкосновенiя между тѣлами при относительномъ перемѣщенiи является сила тренiя, уменьшающая величину касательной составляющей скорости, что влечетъ за собою уменьшенiе угла отраженiя тѣла отъ плоскости. Кромѣ того сила эта вызываетъ вращенiе тѣла.

Во вторыхъ, тѣла не обладаютъ совершенной упругостью, поэтому нормальная составляющая скорости въ концѣ удара будетъ меньше соотвѣтствующей ей величины въ началѣ его. Это обстоятельство вліяетъ въ сторону увеличенія угла отраженія. При пропорціональномъ уменьшеніи *обѣихъ составляющихъ* направленіе конечной скорости можетъ остаться безъ измѣненія величина же ея будетъ во всякомъ случаѣ уменьшена.

§ 263. Задачи *).

1. Неупругое тѣло вѣсомъ 30 фн., двигаясь со скоростью 14 фут./сек ударяется о неподвижное тѣло вѣсомъ 10 фн.; ударъ прямой центральный. Опредѣлить скорость послѣ удара?

2. Какую скорость должно имѣть неупругое тѣло вѣсомъ 2 кгр., чтобы посредствомъ удара измѣнить скорость тѣла, вѣсящаго 8 кгр., съ 3 м./сек. въ 3,6 м./сек.?

3. Съ какою скоростью должно удариться неупругое тѣло, вѣсомъ 12 фн. въ неподвижное тѣло, вѣсомъ 30 фн чтобы послѣднее пріобрѣло скорость 3,4 фут./сек.?

4. Какіе результаты дадутъ предыдущія задачи если предположить тѣла совершенно упругими?

5. Неупругое тѣло, вѣсомъ 20 кгр., движется со скоростью 8 м./сек. Съ какою скоростью должно двигаться на встрѣчу другое тѣло вѣсомъ 36 кгр., чтобы оба тѣла послѣ удара остановились?

6. Двѣ повозки вѣсомъ соотвѣтственно 6 и 4 тонны **) движутся на встрѣчу одна другой со скоростью 6 и 5 м./сек.. Найти: а) работу при ударѣ; б) мощность въ л. силахъ, если работа эта доставлена въ теченіе 1 сек. в) работу, если повозки движутся въ одномъ направленіи?

7. Два желѣзнодорожные поѣзда первый вѣсомъ въ 16000 пуд., второй—18500 пуд., движутся одинъ за другимъ со скоростью 25 и 40 вер./час. Опредѣлить работу, которая пошла на разрушеніе поѣздовъ при ихъ столкновеніи, предполагая ударъ прямымъ центральнымъ и неупругимъ?

8. Въ машинѣ въ каждую минуту происходитъ по 20 встрѣчныхъ ударовъ между двумя неупругими тѣлами вѣсомъ 160 и 250 кгр изъ которыхъ первое имѣетъ скорость 1,75 м./сек а второе 0,6 м./сек Какъ велика потеря живой силы въ секунду?

9. Два совершенно упругихъ шара 20 и 50 фн вѣсомъ движутся на встрѣчу со скоростями 12 и 8 фут./сек. Найти скорости ихъ послѣ удара, предполагая послѣдній прямымъ центральнымъ?

10. Два совершенно упругихъ шара A и B, пущенные свободно падать съ высотъ h и h' по одной вертикали и въ одно и то же мгно-

*) Бо́льшая часть задачъ настоящей главы взята изъ Учебника механики С Гуржеева, 1896.

**) Тонна = 1000 кгр.

веніе, ударяются о наклонную плоскость, уголъ которой равенъ 45° Какое горизонтальное разстояніе пройдутъ шары до встрѣчи?

11. Два неупругія тѣла вѣсомъ 6 и 10 кгр. движутся со скоростями 10 и 26 м./сек., изъ которыхъ первая образуетъ съ плоскостью касанія уголъ 45°, а вторая уголъ 75°. Съ какими скоростями и по какимъ направленіямъ будутъ двигаться онѣ послѣ удара?

12. Чугунная баба вѣсомъ 100 пуд. падаетъ съ высоты въ 14 футъ на сваю вѣсомъ 16 пуд., углубляя ее при ударѣ на 0.25 дм. а) Найти работу сопротивленія грунта, предполагая его постояннымъ. б) Найти грузъ, который будучи положенъ на сваю углубилъ бы ее на ту же величину?

Рѣшенія задачъ.

1. 10.5 фт./сек.

2. 6 м./сек.

3. 11.9 фт./сек.

4. Зад. № 1: 21 фт./сек. для неподвижнаго, 7 фт./сек. для ударившаго. Зад. № 2: 4,5 м./сек. Зад. № 3: 5,95 фт./сек.

5. 4,44 м./сек.

6. а) $\dfrac{6000 \cdot 4000}{2 \cdot 9{,}81 \cdot 10000}(6 + 5)^2 = 14762$ кгр. м

б) $\dfrac{14762}{75} = 197$ л. с.

в) $\dfrac{6000 \cdot 4000}{2 \cdot 9{,}81 \cdot 10000}(6 - 5)^2 = 122$ кгр. м

7. 28320 пуд. фт.

8. 9,89 кгр. м.

9. $v_1 = 16{,}57$ фт./сек.; $v_2 = -3{,}428$ фт./сек.

10. Такъ какъ тѣла совершенно упруги, то наклонная плоскость измѣнитъ только направленія скоростей, величины которыхъ будутъ: $v = \sqrt{2gh}$ и $v = \sqrt{2gh'}$. Если $h' > h$, то шаръ B отскочитъ отъ наклонной плоскости по горизонтальному направленію, спустя $\sqrt{\frac{2}{g}}(\sqrt{h'} - \sqrt{h})$ сек. послѣ шара A. Называя буквою x время, по прошествіи котораго шаръ B ударитъ A, находимъ, что время движенія шара A равно: $x + \sqrt{\frac{2}{g}}(\sqrt{h'} - \sqrt{h})$ и потому разстояніе пройденное имъ будетъ:

$$= \sqrt{2gh}\left[x + \sqrt{\frac{2}{g}}(\sqrt{h'} - \sqrt{h})\right];$$

но съ другой стороны

$$s = \sqrt{2gh'}\,x.$$

Подставляя въ первое уравненіе вмѣсто x его величину, получимъ послѣ всѣхъ сокращеній:

$$= 2\sqrt{hh'}.$$

11. $v_1 = 19{,}66$ м./сек.; $v_2 = 19{,}5$ м./сек.; $\alpha_1 = 68°55'40''$; $\alpha_2 = 69°51'30''$

12. а) Искомая работа равна: $Ph = 100 \,.\, 14 = 1400$ пудофут.

б) x пуд. 0,25 дм. $= 1400 \,.\, 12$ пудодм., откуда $x = 67200$ пуд Величина эта показываетъ, что углубленіе сваи безъ помощи удара было бы невозможно.